অঙ্ক কষা সহজ

ডঃ কমল চক্রবর্তী

অঙ্ক কষা সহজ

ডঃ কমল চক্রবর্তী

৭৩, মহাত্মা গান্ধী রোড

ANKA KASA SAHAJ
A Mathematical Quiz
By
Dr. Kamal Chakrabarti
Revised Edition ; July 1988
Price : Rupees Twelve only

পরিবর্ত্তিত ও পরিবর্দ্ধিত সংস্করণ
জুলাই ১৯৮৮/আষাঢ় ১৩৯৫

প্রকাশক :
শ্রীতপনকুমার ঘোষ
সাহিত্যশ্রী
৭৩ মহাত্মা গান্ধী রোড
কলিকাতা-৯

মুদ্রাকর :
শ্রীসীতারাম পাল
নিউ পাল প্রেস
৬৭/এ উমেশ চন্দ্র ব্যানার্জী স্ট্রীট
কলিকাতা—৬

প্রচ্ছদ : শ্রীগণেশ বসু

মূল্য : বারো টাকা মাত্র।

বিশ্ববিখ্যাত বিজ্ঞানী আইজ্যাক নিউটন স্মরণে—

নিবেদন

অংক কষা কারো কারো কাছে সহজ, আবার কারো কারো কাছে বড়ই কঠিন। কিছুটা মাথা আর কিছু অংকের প্রতি ভালবাসা না থাকলে অংক কষা কখনই সহজ নয়। বিশেষ করে উঁচু ক্লাশে। অংক না জানলে বিজ্ঞানের বহু বিষয়ই ভাল করে বোঝা যায় না। অংক কষাটা দু'জন কবি খুব একটা পছন্দ করতেন না। কারণ, তাঁরা অংকে কাঁচা ছিলেন। এঁরা হলেন লর্ড বায়রণ এবং রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর। এ কথাটি আমরা জানতে পারি আচার্য প্রফুল্ল চন্দ্র রায়ের আত্মচরিত থেকে। প্রফুল্ল চন্দ্র রায় লিখেছেন, "লর্ড বায়রণ এবং আমাদের রবীন্দ্রনাথ অংকে অত্যন্ত কাঁচা ছিলেন এবং সেই কারণে বিশ্ববিদ্যালয়ে তাঁদের সাফল্যের পথ রুদ্ধ হইয়াছিল।"

অংকের মধ্যেও যে অনেক আনন্দ আছে সেটা যখন আমরা অনুভব করতে পারব, তখন অংকের প্রতি আমাদের অনুরাগ আসবে, আর রাগ তখন দূরে সরে যাবে। অনুরাগের থেকে রাগের দূরত্ব তখন অনুমাত্র হবে না, হবে অনেক বেশী। এই উদ্দেশ্যে অংকের মধ্যে ঢুকতে বইয়ের নাম দিলাম 'অংক কষা সহজ'।

প্রথম সংস্করণ অল্প সময়ের মধ্যেই ছাত্রদের দ্বারা সমাদৃত হওয়ায় দ্বিতীয় সংস্করণের তাগিদ অনুভব করি। আর এই সুযোগেই কিছু কিছু নতুন বিষয় বইয়ে সংযোজন করা হলো। আশা করি বইটি এবার ছাত্রদের কাছে আরও সমাদৃত হবে।

কালিন্দী হাউসিং এস্টেট
কলিকাতা—৭০০০৮৯
জুলাই, ১৯৮৮

কমল চক্রবর্তী

লেখকের অন্যান্য বই

বিজ্ঞানের ছড়া

বিজ্ঞান বিচিত্রা

বিজ্ঞান ভাবনা

জ্ঞানের আসর

হাতে কলমে রসায়ন

অঙ্ক নিয়ে ক্যুইজ

ঃ বিষয় সূচী ঃ

অঙ্ক কষা সহজ

১

সংখ্যার খেলা

সেবার মেদিনীপুরের একটি স্কুলে দিলীপ চক্রবর্তী নামে এক অংকের শিক্ষক এলেন। তিনি আসার কিছুদিনের মধ্যে ছেলেদের অত্যন্ত আপনজন হয়ে উঠলেন। এই এত আপন হওয়ার মূলে ছিল তাঁর আনন্দ দেওয়ার ক্ষমতা। তিনি অংককে সহজ করে, মজা করে ছাত্রদের কাছে তুলে ধরতেন। তাঁর অংক করার কায়দাটা এত মজার ছিল যে, যে-ক্লাসে তিনি যেতেন, সেই ক্লাসের ছেলেরা তখন যেন আনন্দে দিশেহারা হয়ে উঠত। তিনি ছাত্রদের অনেক সংখ্যার খেলা দেখিয়েছিলেন। তারই কতগুলো তোমাদের জানবার জন্য একে একে সাজিয়ে দিচ্ছি।

১। কি করে চারটে ৪ দিয়ে ২০ পাওয়া যাবে?

উত্তর। দুটো ৪ দিয়ে পাওয়া যাবে ১, (৪ ÷ ৪ = ১)। ১-এর সঙ্গে আর একটা ৪ যোগ করে পাওয়া যাবে ৫, (৪ + ১ = ৫)। এবার ৫-এর সঙ্গে অবশিষ্ট ৪ দিয়ে গুণ করলেই পাওয়া যাবে ২০।

২। আটটা ৮ দিয়ে কি করে ১০০০ পাওয়া যাবে?

উত্তর। আটটা ৮-কে নিচের মত করে লিখে যোগ দিলেই ১০০০ পাওয়া যাবে।

৮ + ৮ + ৮ + ৮৮ + ৮৮৮ = ১০০০

৩। ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮ এবং ৯ এই সংখ্যাগুলোকে পরপর রেখে কয়েকটি সংখ্যাসমষ্টি এমনভাবে সাজাতে হবে যে, শুধু যোগ আর বিয়োগ চিহ্ন ব্যবহার করে যোগফল ১০০ হবে।

উত্তর। যেভাবে সাজাতে হবে:

$$১২৩-৪৫-৬৭+৮৯=১০০$$

৪। ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সবকটি অংক ব্যবহার করে কিভাবে ১০০ করা যাবে?

উত্তর। $৭০+২৪\frac{৯}{১৮}+৫\frac{৩}{৬}=১০০$

আরও নানাভাবে ১০০ করা যায়—আরেকটি উপায় দেখান হলো—(শূন্যকেও এক্ষেত্রে ব্যবহার হয়েছে)

$$\frac{১}{২}+৫০+৪৯+\frac{৩৮}{৭৬}=১০০$$

৫। ০ থেকে ৯ পর্যন্ত সবকটি অংক নিয়ে কিভাবে ১ করা যায়?

উত্তর। দু'টো ভগ্নাংশের যোগফল হিসেবে ১ পাওয়া যেতে পারে।

$$\frac{১৪৮}{২৯৬}+\frac{৩৫}{৭০}=\frac{১}{২}+\frac{১}{২}=১$$

৬। ১১১, ২২২, ৩৩৩, ৪৪৪, ৫৫৫, ৬৬৬, ৭৭৭, ৮৮৮ এবং ৯৯৯ প্রভৃতি তিন অংকের সংখ্যাগুলো দেখতে বেশ। কারণ, একই অংক তিনবার আছে প্রতি সংখ্যাতে। এগুলি ৩৭ দিয়ে ভাগ দিলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে কি কি সংখ্যা পাওয়া যাবে?

উত্তর। ৩৭ দিয়ে প্রত্যেকটি সংখ্যাকে ভাগ করলে যথাক্রমে পাওয়া যাবে ৩, ৬, ৯, ১২, ১৫, ১৮, ২১, ২৪ এবং ২৭।

৭। ১১, ১১১, ১১১১, ১১১১১ এই ছন্দে সংখ্যাগুলি কিভাবে পাওয়া যাবে ?

উত্তর। ৯ × ১ + ২ = ১১

৯ × ১২ + ৩ = ১১১

৯ × ১২৩ + ৪ = ১১১১

৯ × ১২৩৪ + ৫ = ১১১১১।

৮। দুটি সংখ্যার গুণফল আর বিয়োগফল কি কখনও সমান হতে পারে ?

উত্তর। পারে। বিশ্বাস না হয়, মিলিয়ে দেখা যাক।

যেমন (১) ২ এবং ২/৩ সংখ্যা দুটির গুণফল ও বিয়োগফল ৪/৩।

(২) ১৯ এবং ০·৯৫ সংখ্যা দুটির গুণফল ও বিয়োগফল ১৮·০৫।

৯। দুটি সংখ্যার গুণফল আর যোগফল আবার অনেক সময় সমান হতে পারে।

উত্তর। যেমন—

			যোগফল এবং গুণফল
২	এবং	২	৪
৩	এবং	৩/২	৯/২
৪	এবং	৪/৩	১৬/৩
১০	এবং	১০/৯	১০০/৯
৩	এবং	১·৫	৪·৫
৬	এবং	১·২	৭·২
১১	এবং	১·১	১২·১
২১	এবং	১·০৫	২২·০৫

উপরের উদাহরণগুলিতে দুটি সংখ্যার যোগফল ও গুণফল সমান হয় তার কারণ নিচের দুটি অভেদ থেকে একই ফল পাওয়া যায়।

$$x + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

এবং $x \times \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$

x এবং $\frac{x}{x-1}$ এখানে দুটি সংখ্যা এবং x-এর যে যে মানের জন্য অভেদ দুটি সিদ্ধ হয় সেই সব মান এমন ফল দেখায়।

আবার কতগুলি সংখ্যা আছে যাদের যোগফল যত, গুণফল তার ঠিক উল্টো।

যেমন—

(ক) ২৪ + ৩ = ২৭

২৪ × ৩ = ৭২

(খ) ৪৭ + ২ = ৪৯

৪৭ × ২ = ৯৪

(ক) এবং (খ) এই দুটি ক্ষেত্রেই গুণফল আর যোগফলের অন্তর হচ্ছে একই সংখ্যা অর্থাৎ ৪৫।

৭২ − ২৭ = ৪৫

এবং ৯৪ − ৪৯ = ৪৫

১০। ১১টি ঘর দেওয়া আছে। এই ঘরগুলোর মধ্যে ১১টি অংক রাখতে হবে। প্রথম ঘর ও শেষ ঘরে যে যে অংক থাকবে তাদের যোগফল ৯ হতে হবে। আর বাকী ৯টি ঘরে একই অংক রাখতে হবে। কিভাবে তা সম্ভব? কি করে এই সংখ্যাগুলি পাওয়া যেতে পারে?

উত্তর। ৯৮৭৬৫৪৩২১ এই সংখ্যাটিকে যথাক্রমে ১৮, ২৭, ৩৬, ৪৫, ৫৪, ৬৩, ৭২ এবং ৮১ দিয়ে গুণ করলে ১১টি অংকের সংখ্যা পাওয়া যাবে। এখন প্রথম ঘর ও শেষ ঘরের অংক দুটির যোগফল প্রতি ক্ষেত্রে হচ্ছে ৯। যে সংখ্যা দিয়ে গুণ হচ্ছে তার একটা অংক গুণফলের একদম প্রথমে আর একটা একেবারে শেষে থেকে সব অংককে যেন পাহারা দিচ্ছে। যেমন—

৯৮৭৬৫৪৩২১ × ১৮ = ১৭৭৭৭৭৭৭৭৭৮
” × ২৭ = ২৬৬৬৬৬৬৬৬৬৭
” × ৩৬ = ৩৫৫৫৫৫৫৫৫৫৬
” × ৪৫ = ৪৪৪৪৪৪৪৪৪৪৫
” × ৫৪ = ৫৩৩৩৩৩৩৩৩৩৪
” × ৬৩ = ৬২২২২২২২২২৩
” × ৭২ = ৭১১১১১১১১১২
” × ৮১ = ৮০০০০০০০০০১

ওপরের সংখ্যাটিকে ৯ দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যাবে ১০ অংকের সংখ্যা। যেমন—

৯৮৭৬৫৪৩২১ × ৯ = ৮৮৮৮৮৮৮৮৮৯

প্রথম ঘরের ৯-এর সঙ্গে ১১তম ঘরে ০ (শূন্য) বসিয়ে যোগফল ৯ দেখান যেতে পারে। আর এভাবে দেখলে বাকীগুলোর সঙ্গে এটিও একই ছন্দে থাকবে। অর্থাৎ ০ আর ৯-এর মধ্যে নয়টি ৮ বাঁধা পড়ে থাকে।

৮৩ × ৪১০৯৫৮৯০৪১০৯৬ = ৩৪১০৯৫৮৯০৪১০৯৬৮

১১। ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সব অংকই থাকবে এমন সংখ্যার খেলা (গুণ করার খেলা) ৯ ভাবে খেলা যায়।

(ক) ৪ × ১৭৩৮ = ৬৯৫২

(খ) ৪ × ১৯৬৩ = ৭৮৫২

(গ) ১২ × ৪৮৩ = ৫৭৯৬

(ঘ) ১৮ × ২৯৭ = ৫৩৪৬

(ঙ) ২৭ × ১৯৮ = ৫৩৪৬

(চ) ২৮ × ১৫৭ = ৪৩৯৬

(ছ) ৪২ × ১৩৮ = ৫৭৯৬

(জ) ৩৯ × ১৮৬ = ৭২৫৪

(ঝ) ৪৮ × ১৫৯ = ৭৬৩২

১২। মজার গুণফল ঃ

এমন ছুটি সংখ্যা গুণ করা হলো, যে গুণফল সংখ্যা ছুটো থেকেই তৈরী হয়েছে অর্থাৎ গুণের আগে সংখ্যাগুলো যে যে অংকের ছিল, সেই সেই অংকই আবার গুণফলে স্থান পেয়েছে। নিচের গুণটির দিকে তাকালেই তা ধরা পড়বে ঃ

৮ × ৮৬ = ৬৮৮

বহুরূপে ৪৫

১৩। ১ থেকে ৯ পর্যন্ত অংকগুলি লিখে যোগ করলে যোগফল হবে ৪৫।

১২৩৪৫৬৭৮৯ এই সংখ্যাটিকে ২ দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যায় ২৪৬৯১৩৫৭৮, এই সংখ্যাটির অংকগুলির যোগফল হল সেই ৪৫। ১২৩৪৫৬৭৮৯০ এই সংখ্যাটিকে ২ দিয়ে ভাগ করলে পাওয়া যায় ৬১৭২৮৩৯৪৫। এই সংখ্যাটিরও অংকগুলির যোগফল হল ৪৫।

১৪। অংকের খেলায় ৩টি ৩ দিয়ে ১ থেকে ১০ পর্যন্ত সংখ্যাগুলি কিভাবে পাওয়া যাবে?

উত্তর। $৩^{৩-৩} = ৩^০ = ১$

$\frac{৩+৩}{৩} = \frac{৬}{৩} = ২$

$\frac{৩ \times ৩}{৩} = ৩$

$৩ + \frac{৩}{৩} = ৪$

$৩ + ৩^০ + ৩^০ = ৫$

$৩ + \frac{৩}{৩^০} = ৩ + ৩ = ৬$

$৩ + ৩ + ৩^০ = ৩ + ৩ + ১ = ৭$

$৩ \times ৩ - ৩^০ = ৯ - ১ = ৮$

$৩ \times ৩ \times ৩^০ = ৯ \times ১ = ৯$ (বা, $৩ + ৩ + ৩ = ৯$)

$৩ \times ৩ + ৩^০ = ৯ + ১ = ১০$

(আমরা জানি কোন সংখ্যার সূচক ০ হলে সংখ্যাটির মান হয় ১)

১৫। ১ থেকে ৯-এর পাহাড়ে ওঠা আবার সেখান থেকে নামা ঃ

ন'টা ৯কে পরপর লিখে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাকে ১২৩৪৫৬৭৯ দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যাবে ১২৩৪৫৬৭৮৯৮৭৬৫৪৩২১। ঠিক যেন ১ থেকে ৯-এর পাহাড়ে উঠে সেখান থেকে আবার ১-এ নেমে আসার ব্যাপার।

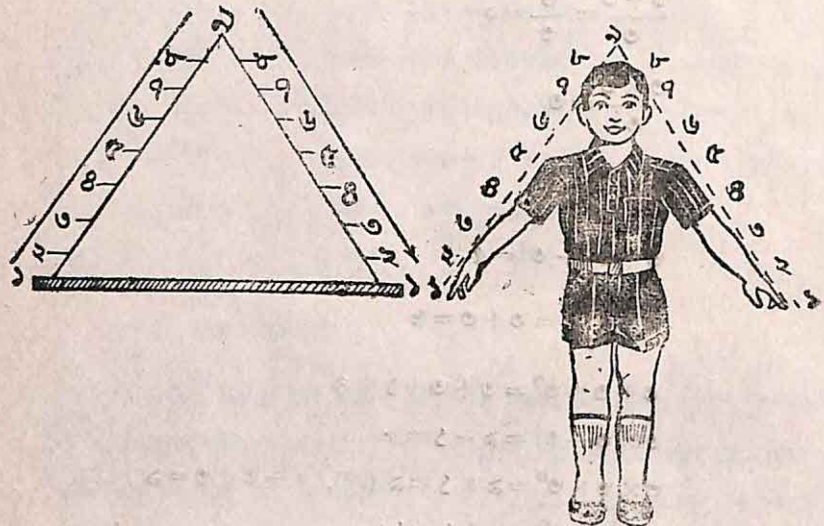
গুণটা সহজে করা যায় এইভাবে—

$১২৩৪৫৬৭৯ \times ৯৯৯৯৯৯৯৯৯$

$= ১২৩৪৫৬৭৯(১০০০,০০০,০০০ - ১)$

$$=১২৩৪৫৬৭৯০০০০০০০০০ - ১২৩৪৫৬৭৯$$

$$=১২৩৪৫৬৭৮৯৮৭৬৫৪৩২১$$



১৬। (ক) (৩ অংকের মিছিল)

৩৭ সংখ্যাটিকে ৩ বা তার গুণিতক দিয়ে গুণ করলে গুণফলে চমক আনে। তাই পাওয়া যায় ১১১, ২২২, ৩৩৩, ৪৪৪, ৫৫৫ ৬৬৬ প্রভৃতি।

$$৩৭ \times ১ \times ৩ = ১১১$$

$$৩৭ \times ২ \times ৩ = ২২২$$

$$৩৭ \times ৩ \times ৩ - ৩৩৩$$

$$৩৭ \times ৪ \times ৩ = ৪৪৪$$

$$৩৭ \times ৫ \times ৩ = ৫৫৫$$

$$৩৭ \times ৬ \times ৩ = ৬৬৬$$

$$৩৭ \times ৭ \times ৩ = ৭৭৭$$

$$৩৭ \times ৮ \times ৩ = ৮৮৮$$

$$৩৭ \times ৯ \times ৩ = ৯৯৯$$

১৬ (খ) (৬ অংকের মিছিল)

৩৩৬৭ সংখ্যাটি ৩৩ বা তার গুণিতককে সঙ্গে পেলে গুণফলে চমক আনে। তাই পাওয়া যায় ১১১১১১, ২২২২২২, ৩৩৩৩৩৩, ৪৪৪৪৪৪ প্রভৃতি।

৩৩৬৭ × ১ × ৩৩ = ১১১১১১

৩৩৬৭ × ২ × ৩৩ = ২২২২২২

৩৩৬৭ × ৩ × ৩৩ = ৩৩৩৩৩৩

৩৩৬৭ × ৪ × ৩৩ = ৪৪৪৪৪৪

৩৩৬৭ × ৫ × ৩৩ = ৫৫৫৫৫৫

৩৩৬৭ × ৬ × ৩৩ = ৬৬৬৬৬৬

৩৩৬৭ × ৭ × ৩৩ = ৭৭৭৭৭৭

৩৩৬৭ × ৮ × ৩৩ = ৮৮৮৮৮৮

৩৩৬৭ × ৯ × ৩৩ = ৯৯৯৯৯৯

১২ (গ) একই অংকের বড় মিছিল।

৬৫৩৫৯৪৭ ১২৪১৮৩ সংখ্যাটি ১৭ বা তার গুণিতক দিয়ে গুণ করলে একই অংকের কয়েকটি বড় মিছিল পাওয়া যাবে।

৬৫৩৫৯৪৭৭১২৪১৮৩ × ১৭ × ১ = ১১১১১১১১১১১১১১১১

„ × ১৭ × ২ = ২২২২২২২২২২২২২২২২

১৭। তিন অংকের সংখ্যার খেলা।

একটি তিন অংকের সংখ্যা লেখা হলো। সংখ্যাটিকে এবার উল্টে দেওয়া হলো। তারপর বড় সংখ্যা থেকে ছোট সংখ্যাটি বাদ দেওয়া হলো। ভাগফলটি ৩৩ দিয়ে বিভাজ্য হবে।

ধরা যাক একটি সংখ্যা = ৫০১, এর উল্টো সংখ্যা হলো ১০৫। বিয়োগফল = ৫০১ − ১০৫ = ৩৯৬, এই বিয়োগফল ৩৩ দিয়ে বিভাজ্য।

১৮। সবসময় ২ পাওয়ার নিয়ম।

ধরা যাক একটি সংখ্যা ৪। সংখ্যাটিকে ৩ দিয়ে গুণ দিয়ে তাতে ৬ যোগ দেওয়া হলো, যোগফলকে ৩ দিয়ে ভাগ দিয়ে ভাগফল থেকে ৪ (যে সংখ্যা ধরা হয়েছিল) বিয়োগ দেওয়া হলো। এতে পাওয়া যাবে ২। এই নিয়ম মানলে ৪-এর বদলে যে-কোন সংখ্যা ধরে নিলেও ২ পাওয়া যাবে।

১৯। সবসময় ৫ পাওয়ার নিয়ম।

ধরা যাক কোন একটি সংখ্যা ৮। সংখ্যাটিকে ২ দিয়ে গুণ করে গুণফলে ১০ যোগ করা হলো। যোগফলকে ২ দিয়ে ভাগ দিয়ে ভাগফল থেকে ৮ (অর্থাৎ যে সংখ্যা ধরা হয়েছিল) বিয়োগ করলে ৫ পাওয়া যাবে।

২০। সবসময় ৭ পাওয়ার নিয়ম।

ধরা যাক কোন একটি সংখ্যা ৬। সংখ্যাটিকে ২ দিয়ে গুণ করে গুণফলে ১৪ যোগ করা হলো। যোগফলকে ২ দিয়ে ভাগ দিয়ে ভাগফল থেকে ৬ (যে সংখ্যা ধরা হয়েছিল) বিয়োগ করলে ৭ পাওয়া যাবে।

২১। কোন্ সংখ্যা উল্টে নিয়ে বড় থেকে ছোটটা বিয়োগ করলে বিয়োগফল পাওয়া যাবে ৯৯৯৯ ?

সংখ্যাটি হল ২১২১১। এখন এটিকে উল্টে লিখলে পাওয়া যাবে ১১২১২। বড় সংখ্যা থেকে ছোট সংখ্যাটি বিয়োগ করলে পাওয়া যাবে ৯৯৯৯।

২২। অংকের শীর্ষাসন :—

নয় অংকের সংখ্যা ১২৩৪৫৬৭৮৯কে ৮ দিয়ে গুণ করে গুণফলে ৯ যোগ করা হলো। যোগফলটি যা হলো তা আগের সংখ্যার ঠিক উল্টো অর্থাৎ ৯৮৭৬৫৪৩২১।

২৩। ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সবগুলো সংখ্যা পরপর লেখা হলো। এতে পাওয়া যাবে ১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ ৯। এখন এই সংখ্যাটিকে ঠিক উল্টে লিখলে পাওয়া যাবে ৯ ৮ ৭ ৬ ৫ ৪ ৩ ২ ১। এখন বড়টা থেকে ছোটটা বাদ দেওয়া যাক। বিয়োগফলের দিকে তাকালে দেখা যাবে যে, তাতে ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সব সংখ্যাগুলোই আছে। কেমন মজা হলো, তাই না?

```
  ৯ ৮ ৭ ৬ ৫ ৪ ৩ ২ ১
  ১ ২ ৩ ৪ ৫ ৬ ৭ ৮ ৯
-------------------
  ৮ ৬ ৪ ১ ৯ ৭ ৫ ৩ ২
```

২৪। ৬-এর খেলা।

৬কে লেখা যায়।

(i) (ক) দুটি বিজোড় সংখ্যার যোগফল হিসেবে (১ + ৫ = ৬)

(খ) দুটি জোড় সংখ্যার যোগফল হিসেবে (২ + ৪ = ৬)

(গ) দুটি বিজোড় সংখ্যার বিয়োগফল হিসেবে (৭ − ১ = ৬)

(ঘ) দুটি জোড় সংখ্যার বিয়োগফল হিসেবে (৮ − ২ = ৬)

(ঙ) কতগুলি মৌলিক সংখ্যার বিয়োগফল হিসেবে

২৯ − ২৩ = ৬, ৩৭ − ৩১ = ৬, ৪৭ − ৪১ = ৬

(এখানে ২৩, ২৯, ৩১, ৩৭, ৪১, ৪৭ প্রত্যেকটি সংখ্যাই মৌলিক সংখ্যা অর্থাৎ এই সংখ্যাগুলিকে ১ এবং ঐ সংখ্যা ছাড়া কোন পূর্ণ সংখ্যা দিয়ে সম্পূর্ণভাবে ভাগ যায় না বা এই সংখ্যাগুলির কোন সাধারণ গুণিতক নেই।)

(ii) ৬কে একটি পরিপূর্ণ সংখ্যা বলে। তার মানে এই সংখ্যাটি এর প্রত্যেকটি ভাজকের (৬ বাদে) যোগফলের সমান। অর্থাৎ ১ + ২ + ৩ = ৬, ৬-এর ভাজক ১, ২ এবং ৩ হতে পারে।

এখানে আরও মজার ব্যাপার যে, এই ভাজকগুলির গুণফলও হচ্ছে ৬, অর্থাৎ ১ × ২ × ৩ = ৬

(iii) যে কোন সংখ্যা যার শেষে ৬ আছে তাকে যদি ৬ দিয়ে গুণ করা যায় তবে গুণফলের শেষে ৬ সব সময়ই পাওয়া যাবে। যেমন, ৩৬ × ৬=২১৬, ৪৬ × ৬=২৭৬।

২৫। ৯-এর খেলা।

(ক) ০ থেকে শুরু করে ৯ পর্যন্ত এই দশটি সংখ্যা পরপর রেখে যোগ করলে, যোগফল পাওয়া যাবে ৪৫। এই ৪৫-এর দুটি অংক যোগ করলে (৪+৫=৯) ৯ পাওয়া যাবে।

(খ) যে কোন সংখ্যা লিখে (যার অংকগুলি পরস্পর আলাদা) সংখ্যাটিকে উল্টে দেওয়া হলো। এবার বড়টা থেকে ছোটটা বাদ দিলে একটি সংখ্যা পাওয়া যাবে। এই সংখ্যার অংকগুলি যোগ করলে পাওয়া যাবে ৯।

উদাহরণ। ধরা যাক একটি সংখ্যা ৬৪। এই সংখ্যার অঙ্কগুলি উল্টে দিলে পাওয়া যাবে ৪৬। এবার ৬৪ থেকে ৪৬ বাদ দিলে পাওয়া যাবে ১৮। এই ১৮ সংখ্যার অংক দুটির যোগফল হলো ৯।

(গ) ৯কে যে কোন সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে যে সংখ্যা পাওয়া যাবে, সেই সংখ্যার অংকগুলির যোগফলও ৯ হবে।

৯কে ১৪ দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যাবে ১২৬। এর অংকগুলির যোগফল (১+২+৬=৯) হলো ৯।

(ঘ) দুই অংকের যে সব সংখ্যা আছে যাদের অংকগুলি যোগ করলে ৯ হয়। তারা হলো ১৮, ২৭, ৩৬, ৪৫, ৫৪, ৬৩, ৭২, ৮১, ৯০। লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, সংখ্যাগুলি একটি সমান্তর শ্রেণীতে আছে এবং একটি পদ পরবর্তী পদের সঙ্গে ৯-এর অন্তর মেনে চলছে।

কোন সংখ্যার শ্রেণীতে যদি প্রতিটি পরপর সংখ্যার মধ্যে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার মানের তফাৎ থাকে তবে ঐ শ্রেণীকে সমান্তর শ্রেণী বলে।

যেমন : ১, ৩, ৫, ৭, ৯, ১১, ১৩ প্রভৃতি একটি সমান্তর শ্রেণী। এই শ্রেণীর প্রতিটি পরপর সংখ্যার মধ্যে সাধারণ অন্তর হচ্ছে ২।

২৬। রামানুজনের সংখ্যার বৈশিষ্ট্য—

একবার রামানুজন তাঁর গুরু হার্ডিকে ১৭২৯ সংখ্যাটির ব্যাখ্যা দিয়েছিলেন বেশ মজা করে। তিনি বলেছিলেন,

$$১৭২৯ = ৯^৩ + ১০^৩$$

$$১৭২৯ = ১^৩ + ১২^৩$$

এই ১৭২৯ সংখ্যাটির ভাজকগুলি হলো ১, ৭, ১৩, ১৯, ৯১, ১৩৩ এবং ২৪৭। এবং প্রত্যেকেই ১৭২৯ থেকে ছোট। এই ভাজক সংখ্যাগুলির গুণফল অর্থাৎ $১ \times ৭ \times ১৩ \times ১৯ \times ৯১ \times ১৩৩ \times ২৪৭$

$$= (১৭২৯)^৩$$

আবার এই সংখ্যাগুলির যোগফল অর্থাৎ

$$১ + ৭ + ১৩ + ১৯ + ৯১ + .৩৩ + ১৪৭ = ৫১১ = ৮^৩ - ১^৩$$

২৭ তিন বন্ধু সংখ্যার কথা।

যে সংখ্যার শেষে ৫ থাকবে, সেই সংখ্যাকে বারবার একই সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে, গুণফলের শেষ অংকটি ৫ হবে।

ধরা যাক, একটি সংখ্যা ১৫। এবার ১৫কে ১৫ দিয়ে গুণ করা হলো। গুণফল হলো ২২৫। গুণফলের শেষ অংকটি হলো ৫। গুণফলকে আবার ১৫ দিয়ে গুণ করলে নতুন যে সংখ্যাটি পাওয়া যাবে তার শেষের অংকটি আবার ৫ হবে। এর থেকে আমরা বলতে পারি $১৫^{১৬}$ বা $১৫^{১৭}$ বা $১৫^{৫৪}$ এদের শেষ অংকটি হবে ৫।

একইভাবে দেখা গেছে, যে সংখ্যার শেষে ৬ আছে, সেই সংখ্যাকে একই সংখ্যা দিয়ে বার বার গুণ করলে, গুণফলের শেষ অংকটি ৬ হবে। একইরকমভাবে দেখা যাবে যে, যে সংখ্যার শেষে ১ আছে তাকে সেই সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে গুণফলের শেষ অংকটি ১ হবে। সুতরাং, এদিক দিয়ে দেখলে বলা যায় ১, ৫ ও ৬ পরস্পর বন্ধু। আবার $১ + ৫ = ৬$।

২

কিছু সমস্যা ও তার সমাধান

অংকের শিক্ষক দিলীপ চক্রবর্তীর কথা আমরা গোড়াতেই বলেছি। তার সংখ্যা নিয়ে খেলা স্কুলের ছেলেদের খুব আনন্দ দিয়েছিল। তিনি গুণ আর ভাগের মধ্যেও নানা ধরনের সমস্যা খুঁজে পেয়েছিলেন এবং সেইসব সমস্যা থেকে কিভাবে উদ্ধার পাওয়া যাবে তার হদিশ তিনিই দিয়েছিলেন। যে সব সমস্যা এখন আমরা দেখতে পাব সেগুলি কিন্তু সংখ্যার খেলাতে বলা হয়নি। এখানে সমস্যাগুলো একটু অন্যরকম। তাই নতুন করে বলার প্রয়োজন আছে। একটু মন দিয়ে দেখলে আমরা সকলেই বোধহয় এগুলি থেকে আনন্দ লুফে নিতে পারব।

মজার মজার গুণ—

(১) ধরা যাক ৯৮৫কে ৯৯৫ দিয়ে গুণ করতে হবে। সাধারণভাবে গুণ না করেও আমরা নিচের মত করে গুণটি করতে পারি।

$$
\begin{aligned}
৯৮৫ \times ৯৯৫ &= (১০০০ - ১৫) \times (১০০০ \times ৫) \\
&= ১০০০(১০০০ - ১৫) - ৫ \times ১০০০ + ৫ \times ১৫ \\
&= ১০০০ \times ৯৮৫ - ৫ \times ১০০০ + ৫ \times ১৫ \\
&= ১০০০(৯৮৫ - ৫) + ৭৫ \\
&= ১০০০ \times ৯৮০ + ৭৫ \\
&= ৯৮০০০০ + ৭৫ \\
&= ৯৮০০৭৫
\end{aligned}
$$

২। দুটি তিন অংকের সংখ্যায় যদি কিছু মিল থাকে, তবে তাদের গুণে পাওয়া যাবে শুধু আনন্দ। কারণ সেখানে কোন অসুবিধায়

পড়তে হয় না। তিন অঙ্কের সংখ্যা দুটিকে একটু নিয়ম মেনে চলতে হবে অবশ্য। নিয়মগুলো হচ্ছে। (ক) দুটি সংখ্যার শেষের (অর্থাৎ শতক এবং দশকের) অংক দুটি একই হতে হবে আর (খ) সংখ্যা দুটির প্রথম অংকের (অর্থাৎ একক ঘরের) যোগফল ১০ হতে হবে।

একটা উদাহরণ দিলেই ব্যাপারটা পরিষ্কার হয়ে যাবে।

ধরা যাক ৬৮৩কে ৬৮৭ দিয়ে গুণ করতে হবে।

এখানে দুটি সংখ্যার শেষের অংক দুটি একই অর্থাৎ ৬৮ এবং এককের ঘরের অংক দুটোর যোগফল ১০, (৩+৭=১০)

∴ সংখ্যা দুটির গুণফল হবে—

৬৮৩ × ৬৮৭ = ৪৬৯২২১

[সহজভাবে গুণফলটা পেতে হলে—যে দুটি অংকের সংখ্যা একই সেটি এবং তার সঙ্গে ১ যোগ করে সংখ্যা দুটি গুণ করতে হবে এবং এককের ঘরের সংখ্যাটি গুণ করতে হবে। এক্ষেত্রে ৬৮কে ৬৯ দিয়ে গুণ করে, গুণফলের পাশে ৩ এবং ৭-এর গুণফল ২১কে একেবারে ডানদিকে অর্থাৎ দশক ও এককের ঘর জুড়ে লিখে দিতে হবে।]

কেন এভাবে গুণটি করা যায় তা নিচের দিকে লক্ষ্য করলেই বোঝা যাবে।

৬৮৩ × ৬৮৭ = (৬৮০ + ৩) × (৬৮০ + ৭)
= ৬৮০ × ৬৮০ + ৩ × ৬৮০ + ৭ × ৬৮০ + ৩ × ৭
= ৬৮০(৬৮০ + ৩ + ৭) + ২১
= ৬৮০ × ৬৯০ + ২১
= ৬৮ × ৬৯ × ১০০ + ২১
= ৪৬৯২২১

৩। $৯৯\frac{৮৮}{৮৯}\times ৬৯=$ কত?

$৯৯\frac{৮৮}{৮৯}\times ৬৯=\left(৯৯-\frac{৮৮}{৮৯}\right)\times ৬৯$

$=\left(৯৯+\frac{৮৯-১}{৮৯}\right)\times ৬৯$

$=\left(৯৯+\frac{৮৯}{৮৯}-\frac{১}{৮৯}\right)\times ৬৯=\left[৯৯+১-\frac{১}{৮৯}\right]\times ৬৯$

$=\left(১০০-\frac{১}{৮৯}\right)\times ৬৯=৬৯০০-\frac{৬৯}{৮৯}$

$=৬৮৯৯+১-\frac{৬৯}{৮৯}=৬৮৯৯+\frac{২০}{৮৯}=৬৮৯৯\frac{২০}{৮৯}$

৪। এমন গুণ যার সংখ্যাগুলো খুঁজে বের করতে হবে।

এই গুণে বলা আছে ক হলো জোড় সংখ্যা আর খ হলো বিজোড় সংখ্যা। অর্থাৎ ক-এর মান ২, ৪, ৬ ও ৮ প্রভৃতি হবে। আর খ-এর মান ১, ৩, ৫, ৭ ও ৯ হতে হবে।

অংকটা দেওয়া হলো—

```
  ক ক খ
    খ খ
-------
ক খ ক খ
ক খ খ ×
---------
খ খ খ খ খ
```

উত্তর।

```
  ২ ৮ ৫
    ৩ ৯
-------
২ ৫ ৬ ৫
৮ ৫ ৫ ×
---------
১ ১ ১ ১ ৫
```

৫। একটি গুণের অংকে হারিয়ে যাওয়া সংখ্যাগুলি বার করো ?

```
     * * ৫
   × ১ * *
  ----------
   ২ * * ৫
 ১ ৩ * ০ ×
 * * * ×
  ----------
 ৪ * ৭ ৭ *
```

উত্তর।

```
     ৩ ২ ৫
   × ১ ৪ ৭
  ----------
   ২ ২ ৭ ৫
 ১ ৩ ০ ০ ×
 ৩ ২ ৫ ×
  ----------
 ৪ ৭ ৭ ৭ ৫
```

৬। নিচের গুণটির হারিয়ে যাওয়া সংখ্যাগুলো বার করো ?

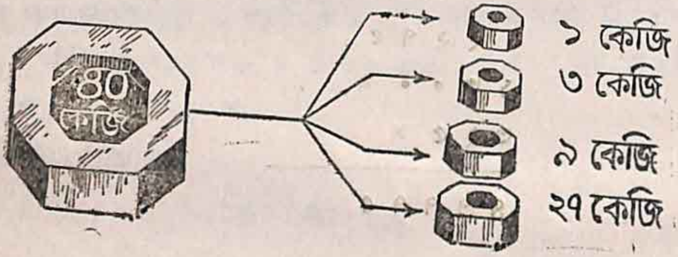
```
      * ১ *
    × ১ * ২
   ---------
      * ৩ *
    ৩ * ২ *
  ৪ * ৫
  ---------
  * ৫ * ৩ ০
```

উত্তর।

```
    ৪ ১ ৫
  × ১ ৮ ২
 ---------
    ৮ ৩ ●
  ৩ ৩ ২ ●
  ৪ ১ ৫
 ---------
  ৭ ৫ ৫ ৩ ০
```

১। চারটি ওজনের বাটখারার বাহাদুরি ঃ

৪০ কেজি ওজনকে এমনভাবে চারটে ভাগে ভাগ করতে হবে যাতে ১ থেকে ৪০ কেজি পর্যন্ত যে কোন ওজন পাওয়া যাবে।



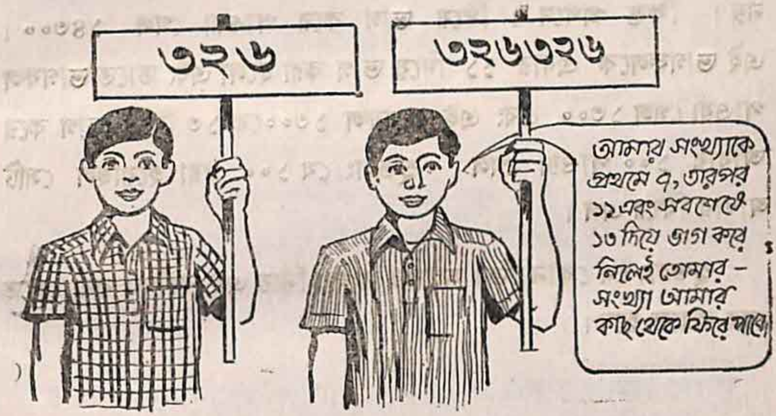
উত্তর। ৪০ কেজি $=$ (১ + ৩ + ৯ + ২৭) কেজি। সুতরাং ১, ৩, ৯ এবং ২৭ কেজিতে ভাগ করলেই তা সম্ভব হবে।

ধরা যাক ৩১ কেজি ওজন আমাদের চাই। সুতরাং এই ওজন পেতে গেলে (১ + ৩ + ২৭) এই তিনটে ওজনকে একত্র করতে হবে। এইভাবে চিন্তা করে ১ থেকে ৪০ কেজির যে কোন ওজনকে আমরা এই চারটে ওজনের সাহায্যে বার করতে পারি। কখনও কখনও চারটে ওজনই কাজে লাগবে। আবার কখনও কখনও এর কম সংখ্যক ওজনকে কাজে লাগিয়ে প্রয়োজনমত ওজন পাওয়া যাবে।

৮। আগের সংখ্যা ফিরে পাবার উপায়—

যে কোন তিন অংকের একটি সংখ্যা লেখা হলো। এবার সংখ্যাটির পেছনে আবার ঐ সংখ্যাটি লেখা হলো। এতে ছয় অংকের একটা সংখ্যা পাওয়া গেল। ছয় অংকের এই সংখ্যাটিকে ক্রমাগত ৭, ১১ আর ১৩ দিয়ে ভাগ করলে পাওয়া যাবে ঠিক সেই তিন অংকের সংখ্যা। খুব মজার জিনিস তাই না?

একটা উদাহরণ দেওয়া যাক—



ধরা যাক ৩২৬ একটি তিন অংকের সংখ্যা নেওয়া হলো। এবারে এর পেছনে আর একবার ৩২৬ সংখ্যাটি লেখা হলো। এতে পাওয়া গেল ছয় অংকের সংখ্যা ৩২৬৩২৬। এই সংখ্যাটিকে প্রথমে ৭ দিয়ে ভাগ করা হলো। এতে ভাগফল পাওয়া গেল ৪৬৬১৮। কিন্তু কোন ভাগশেষ রইল না। এই ভাগফলকে এবার ভাগ করা হলো ১১ দিয়ে। এবারে ভাগফল পাওয়া গেল ৪২৩৮। কিন্তু এবারেও ভাগশেষ কিছুই রইল না। এবার শেষবারের মত এই ভাগফলকে

১৩ দিয়ে ভাগ করা হলো। এতে ভাগফল পাওয়া গেল ৩২৬ অর্থাৎ যে তিন অংকের সংখ্যা ধরা হয়েছিল সেটি ফিরে এল। এই শেষবারেও কোন ভাগশেষ পাওয়া গেল না। এইভাবেই আগের সংখ্যা ফিরে পাওয়া যেতে পারে।

আরো একটি উদাহরণ দেওয়া হলো। ধরা যাক ১০০ একটি তিন অংকের সংখ্যা নেওয়া হলো। এবার আগের মত এর পেছনে ১০০ লিখে পাওয়া গেল ছয় অংকের সংখ্যা ১০০ ১০০। এই সংখ্যাটিকে আপাতভাবে মনে হতে পারে যে, এটি ৭, ১১ বা ১৩ দিয়ে বিভাজ্য নয়। কিন্তু প্রথমে ৭ দিয়ে ভাগ করে পাওয়া গেল ১৪৩০০। এই ভাগফলকে এবার ১১ দিয়ে ভাগ করা হলো এবং তাতে ভাগফল পাওয়া গেল ১৩০০ এবং এই ভাগফল ১৩০০কে ১৩ দিয়ে ভাগ করে আবার ১০০ পাওয়া গেল। সুতরাং যে ১০০ ধরা হয়েছিল সেটি আবার ফিরে এল।

সুতরাং যে কোন তিন অংকের সংখ্যা নিয়ে এই পরীক্ষা করা যেতে বের করতে হবে।

৯। এমন একটি ভাগ যার ভাজক, ভাগফল ও ভাগশেষ খুঁজে বের করতে হবে।

০ থেকে ৯ পর্যন্ত এই দশটি সংখ্যাকে নিয়ে একটি ভাগ করতে হবে। ভাজক, ভাগফল ও ভাগশেষ প্রভৃতি দিয়ে দেওয়া হলো এমনভাবে যে, তাদের সংখ্যাগুলো ক,খ,গ ইত্যাদি দিয়ে সাজান হলো। এদের প্রত্যেকের মান আলাদা। সংখ্যাগুলির মান খুঁজে বার করা যায় কিনা দেখা যাক।

```
কখ) কগখঘঙ ( ঘকচ
    কগচ
    ------
      ছ ঘ
      জ ঝ
     ------
       খ ঙ
       ঝ ঘ
      -----
         ঞ
```

উত্তর।

```
২৯)২০৯৭১(৭২৩
   ২০৩
   -----
     ৬৭
     ৫৮
    -----
     ৯১
     ৮৭
    -----
      ৪
```

১০। (ক) আগের সংখ্যা ফিরে পাবার উপায় আমরা পেলাম। এবার তিন অংকের সংখ্যাকে ফিরে পাবার আর একটি উপায় দেখান হচ্ছে। তবে অংক তিনটে যেন এক সমান্তর শ্রেণীতে থাকে, সেদিকে লক্ষ্য রাখতে হবে। সমান্তর শ্রেণীর প্রথম অংকটি থেকে দ্বিতীয় অংকটি যত বড়, তৃতীয় অংকটি, দ্বিতীয় অংক থেকে ঠিক তত বড়। অর্থাৎ তিনটে অংকের মধ্যে পরস্পরের পার্থক্য একই থাকে।

এখন তিন অংকের এরূপ একটি সংখ্যা ৫৬৭ ধরা হলো। এবার সংখ্যাটির উল্টো সংখ্যাকে (অর্থাৎ ৭৬৫) আগের সংখ্যার পাশে বসান হলো। এতে ছয় অংকের এক বড় সংখ্যা ৫৬৭৭৬৫ পাওয়া গেল। এই সংখ্যাটি যথাক্রমে ৩ এবং ১১ দিয়ে ভাগ করা হলো।

মজার ব্যাপার এই যে, ঐ বড় সংখ্যাটিকে ৩ দিয়ে ভাগ করলে কোন ভাগশেষ থাকবে না। এবং যে ভাগফল পাওয়া যাবে সেটিও ১১ দিয়ে ভাগ করলে মিলে যাবে, কোন ভাগশেষ থাকবে না। ৩ এবং ১১ দিয়ে আলাদাভাবে হু'বার ভাগ না করে ছয় অংকের সংখ্যাটাকে একেবারে ৩৩ দিয়ে ভাগ করলেও চলবে। এবং তাতে ভাগফল পাওয়া যাবে ১৭০৫। এই সংখ্যাটির (অর্থাৎ ১৭০৫) একক স্থানে আছে ৫। এখন একক ও দশক স্থানের অংক হুটির যোগফল (০+৫) =৫কে দশক স্থানে লেখা হলো। [একক ও দশক স্থানের অংক হুটির যোগফল যদি ১০ বা তার বেশি হয় তাহলে ডানদিকের অংকটি নিতে হবে এবং হাতের ১ ধরতে হবে না।] এখন হুই অঙ্কের সংখ্যাটি দাঁড়ায় ৫৫। এই সংখ্যাটিকে ৩ দিয়ে গুণ করলে পাওয়া যাবে ১৬৫ সংখ্যাটি। ডানদিকের অংক হুটি নিয়ে যে সংখ্যা সেটি হল ৬৫। একে উল্টে দিলে পাওয়া যাবে ৫৬। এখন যেহেতু যে সংখ্যাটি ধরা হয়েছিল তার অংকগুলি সমান্তর শ্রেণীতে এবং তিন অংকের ছিল, সেই হিসেবে ৫৬-এর পাশে ৭ লিখে প্রথম সংখ্যাটি ফিরে পাওয়া যায় অর্থাৎ ৫৬৭ সংখ্যাটি ফিরে আসে।

(খ) আর একটি উদাহরণ দেওয়া হলো। মনে করি একটি তিন অংকের সংখ্যা ১২৩। এর পাশে এর উল্টো সংখ্যা ৩২১ বসান হলো এবং ছয় অংকের সংখ্যা ১২৩৩২১ পাওয়া গেল। এই ১২৩৩২১কে ৩৩ দিয়ে ভাগ করে পাওয়া গেল ৩৭৩৭। এই সংখ্যার একক স্থানের একক ৭ এবং একক ও দশক স্থানের অংক হুটির যোগফল = ১০, অতএব নতুন সংখ্যাটি দাঁড়াবে ১০৭। (কিন্তু) শতকের ঘরের ১কে লেখার দরকার নেই। এককের ঘরের ৭কে ৩ দিয়ে গুণ করলে ২১ পাওয়া যায়। ২১কে উল্টোলে পাওয়া যায় ১২। অতএব প্রথম সংখ্যাটি ১২৩ (সমান্তর শ্রেণীর অংক বলে)।

১১। সংখ্যা বিভাজ্যতার পরীক্ষা।

(ক) ২ দিয়ে ভাগ যাবে—যে সংখ্যার শেষে ০ বা জোড় অংক থাকবে, সেই রকম সংখ্যা ২ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কিছুই থাকবে না। অর্থাৎ সংখ্যাটি ২ দিয়ে বিভাজ্য।

(খ) ৩ দিয়ে ভাগ যাবে—কোন সংখ্যা ৩ দিয়ে ভাগ করলে পুরোপুরিভাবে ভাগ হবে অর্থাৎ কোন ভাগশেষ থাকবে না, যখন ঐ সংখ্যার অংকগুলোর যোগফলটি ৩ দিয়ে বিভাজ্য হয়।

১৫, ১৮, ২১, ২৪ প্রভৃতি সংখ্যা ৩ দিয়ে বিভাজ্য, কেননা উহাদের অংকগুলির যোগফল যথাক্রমে ৬, ৯, ৩, ৬ এবং এরা প্রত্যেকেই ৩ দিয়ে বিভাজ্য।

একটা বড় সংখ্যা ধরা যাক, ১২৭৮, এটি কি ৩ দিয়ে বিভাজ্য? এই সংখ্যার অংকগুলির যোগফল ১৮। সুতরাং ৩ দিয়ে বিভাজ্য।

(গ) ৪ দিয়ে ভাগ যাবে—কোন সংখ্যা ৪ দিয়ে ভাগ যাবে যখন সেই সংখ্যার শেষ দুই অংক দিয়ে যে সংখ্যা হয় সেই সংখ্যাটি ৪ দিয়ে ভাগ যায়। তখন আসল সংখ্যাটি ৪ দিয়ে বিভাজ্য হবে।

ধরা যাক ২৪৮০ সংখ্যাটি ৪ দিয়া বিভাজ্য কিনা জানতে হবে। এই সংখ্যার শেষ দুটি অংক দিয়ে যে সংখ্যা সেটি হলো ৮০, এই ৮০ সংখ্যাটি ৪ দিয়ে বিভাজ্য। অতএব ২৪৮০ সংখ্যাটিও ৪ দিয়ে বিভাজ্য।

(ঘ) ৫ দিয়ে ভাগ যাবে—কোন সংখ্যা ৫ দিয়ে ভাগ করলে মিলে যাবে, যদি সংখ্যাটির শেষ অংকটা ০ বা ৫ হয়।

উদাহরণ ঃ—১০০, ২২৫, ৩০০, ৪২৫ প্রভৃতি সংখ্যাগুলি ৫ দিয়ে ভাগ করলে মিলে যাবে এবং কোন অবশিষ্ট থাকবে না।

(ঙ) ৬ দিয়ে ভাগ যাবে—যখন কোন সংখ্যা ২ এবং ৩ দুটো সংখ্যা দিয়েই ভাগ যাবে তখন সংখ্যাটি ৬ দিয়ে ভাগ যাবে।

৯৬ সংখ্যাটি ২ দিয়ে ভাগ যাবে কারণ এটি জোড় সংখ্যা। আবার এটি ৩ দিয়েও ভাগ যাবে, কারণ এই সংখ্যার অংক দুটির যোগফল ১৫ এবং যা ৩ দিয়ে বিভাজ্য।

অতএব ৯৬ সংখ্যাটি ৬ দিয়ে ভাগ যাবে।

(চ) ৭ দিয়ে ভাগ যাবে—

যে সংখ্যার ৭ দিয়ে বিভাজ্যতা দেয়া হবে সেটির এককের ঘরে যে অংকটি থাকবে সেটিকে দ্বিগুণ করতে হবে প্রথমে। এককের ঘরের অংকটি বাদ দিয়ে যে সংখ্যা থাকবে তার থেকে এককের অংকের দ্বিগুণ মান বিয়োগ করতে হবে এবং তার যোগফল যদি ৭ দিয়ে ভাগ যায়, তবে মূল সংখ্যাটিও ৭ দিয়ে বিভাজ্য হবে।

উদাহরণ। (১) ২৪৫ সংখ্যাটি ৭ দিয়ে বিভাজ্য কিনা জানতে হবে। এই সংখ্যায় এককের অংকটি হলো ৫। ৫-এর দ্বিগুণ মান হলো ১০। এখন ৫ বাদে সংখ্যা থাকছে ২৪। ২৪ থেকে ১০ বাদ দিলে থাকে ১৪। ১৪ সংখ্যাটি ৭ দিয়ে বিভাজ্য। সুতরাং ২৪৫ সংখ্যাটি ৭ দিয়ে বিভাজ্য।

উদাহরণ। (২) ৩৯২ সংখ্যাটি ৭ দিয়ে বিভাজ্য কিনা জানা যাক। ৩৯২-এর এককের ঘরে আছে ২। ২-এর দ্বিগুণ করলে হয় ৪। এখন ৩৯ থেকে ৪ বাদ দিলে পাওয়া যায় ৩৫। ৩৫ সংখ্যাটি এখন ৭ দিয়ে বিভাজ্য। সুতরাং ৩৯২ সংখ্যাটি ৭ দিয়ে বিভাজ্য।

(ছ) ৮ দিয়ে ভাগ যাবে—কোন বড় সংখ্যা ৮ দিয়ে ভাগ করলে মিলে যাবে কি না তা বোঝা যায় যদি সংখ্যাটির শেষের তিনটে অংককে একসঙ্গে নিয়ে একটা পরীক্ষা করা যায়। শেষের তিন অংক দিয়ে যে সংখ্যাটা বোঝায় সেটা যদি ৮ দিয়ে ভাগ যায়, তবে বড় সংখ্যাটাও ৮ দিয়ে বিভাজ্য হবে।

উদাহরণ। ৬৬৬৭২ সংখ্যাটি কি ৮ দিয়ে বিভাজ্য? এই সংখ্যার শেষের তিনটে অংক নিয়ে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা হলো ৬৭২ এবং এই ৬৭২কে ৮ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল হয় ৮৪ অর্থাৎ

কোন ভাগশেষ থাকে না। সুতরাং ৬৬৬৭২ সংখ্যাটি ৮ দিয়ে সম্পূর্ণভাবে বিভাজ্য।

(জ) ৯ দিয়ে ভাগ যাবে—কোন সংখ্যা ৯ দিয়ে ভাগ করলে মিলে যাবে কিনা তা জানা যাবে যদি ঐ সংখ্যার অংকগুলোকে প্রথমে যোগ করা হয় এবং যোগফলটি ৯ দিয়ে ভাগ করলে মেলে কি না তা দেখা হয়।

উদাহরণ। ১২৩৪৫৩ এই সংখ্যা ৯ দ্বারা বিভাজ্য কিনা জানতে হলে প্রথেম অংকগুলি যোগ করতে হবে এবং যোগফল = ১ + ২ + ৩ + ৪ + ৫ + ৩ = ১৮

১৮ সংখ্যাটি ৯ দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং ১২৩৪৫৩ সংখ্যাটি ৯ দিয়ে ভাগ করলে মিলে যাবে।

(ঝ) ১০ দিয়ে ভাগ যাবে—কোন সংখ্যার ডানদিকের শেষ অংকটি যদি ০ হয়, তবে সংখ্যাটি ১০ দিয়ে ভাগ করলে মিলে যাবে।

উদাহরণ। ১০২০ এই সংখ্যাটির শেষে ০ আছে এবং এটিকে ১০ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল হবে ১০২। এই ভাগে ০কে মূল সংখ্যা থেকে মুছে দিলেই ভাগফল পাওয়া যায়।

(ঞ) ১১ দিয়ে ভাগ যাবে—কোন সংখ্যা ১১ দিয়ে ভাগ যাবে যদি সংখ্যাটির জোড় স্থানের অংকগুলর যোগফল এবং বিজোড় স্থানের অংকগুলির যোগফল পরস্পর বিয়োগ করে শূন্য বা ১১ বা ১১-এর গুণিতক হয়।

যেমন, ১৫৭৩ সংখ্যাটি ১১ দিয়ে বিভাজ্য।

জোড় স্থানের অংকগুলির যোগফল = ৮ এবং বিজোড় স্থানের অংকগুলির যোগফল = ৮। অতএব এই দুই স্থানের সংখ্যাগুলির যোগফলের অন্তর হলো শূন্য। এতএব সংখ্যাটি ১১ দিয়ে ভাগ যাবে।

দুটি বড় সংখ্যা এবং ভাজক ১১

(ক) নয় অংকের একটি বড় সংখ্যা :

১১ দিয়ে কোন সংখ্যা ভাগ যায় কিনা জানা গেল। এবার এমন একটা সংখ্যা লিখলাম যাতে ১ থেকে আরম্ভ করে ৯ প্রত্যেকটি অংকই থাকছে আর এই বিরাট সংখ্যাটিও ১১ দিয়ে ভাগ করা যাচ্ছে, যাতে কোন ভাগশেষ থাকছে না। সেই বিরাট সংখ্যাটি হলো ৯৮৭৬৫২৪১৩।

এই সংখ্যাটির বিজোড় স্থানের অংকগুলির যোগফল : ৯+৭+৫+৪+৩=২৮ এবং জোড়স্থানের অংকগুালর যোগফল ৮+৬+২+১=১৭

এবার, ২৮−১৭=১১ [বিজোড় স্থানের অংকের যোগফল− জোড় স্থানের অংকগুলির যোগফল]

∴ বিরাট অংকটি নিয়ম অনুযায়ী ১১ দিয়ে ভাগ যাবে।

(খ) নয় অংকের একটি ছোট সংখ্যা :

নয় অংকের সব থেকে ছোট সংখ্যাটি এবার লেখা হলো যা ১১ দিয়ে ভাগ যায়।

সংখ্যাটি হলো : ১০২৩৪৭৫৮৬

বিজোড় স্থানের অংকগুলির যোগফল

=১+২+৪+৫+৬=১৮

আর, জোড় স্থানের অংকগুালর যোগফল

=০+৩+৭+৮=১৮

অর্থাৎ বিজোড় ও জোড় স্থানগুলির অংকগুলির যোগফল একই অর্থাৎ ১৮ এবং নিয়ম অনুযায়ী (১৮−১৮=০) এই সংখ্যাটিও ১১ দিয়ে বিভাজ্য।

(ট) ১২ দিয়ে ভাগ যাবে কোন সংখ্যা ১২ দিয়ে ভাগ করলে মিলবে কিনা তা জানা যাবে যদি সংখ্যাটি পৃথকভাবে ৩ এবং ৪ দুটো সংখ্যা দিয়েই ভাগ করলে মিলে যায়। শুধু ৩ দিয়ে বা শুধু ৪ দিয়ে মিললেই চলবে না।

৩

গল্প আর নিয়ম মেনে অংক

মন্ত্রীর বুদ্ধির পরীক্ষা

(১) প্রথম থেকে পরপর জোড় সংখ্যার যোগফল পাবার উপায় ঃ

এক রাজা একবার যুদ্ধে জয়লাভ করে বিরোধী পক্ষের বহু সৈন্যকে বন্দী করেন। তিনি সৈন্যদের এমনভাবে কতগুলো ঘরে রাখতে চাইলেন যাতে করে নিজের ইচ্ছেমত সৈন্যকে তিনি ডেকে পাঠাতে পারেন। তিনি মন্ত্রীকে হুকুম দিলেন বন্দীদের এমন করে ১০০টি ঘরে বন্দী করে রাখতে যাতে সবচেয়ে ছোট ঘরে ২ জনকে রাখা হয়। তার পরের ঘরে ৪ জনকে এবং তার পরের ঘরে ৬ জনকে। এইভাবে ঘরের আকার অনুসারে ২ জন করে বেশী সৈন্য বিভিন্ন ঘরে রাখতে বললেন। দেখতে দেখতে ১০০টি ঘর ভরে গেল। রাজা মন্ত্রীকে জিজ্ঞেস করলেন, ১০০টি ঘরে মোট বন্দীর সংখ্যা কত? মন্ত্রী বিশেষ মাথা না ঘামিয়েই উত্তর দিলেন যে, বন্দী সৈন্য সংখ্যা হল ১০১০০ জন। রাজা আবার জিজ্ঞেস করলেন, প্রথম ৮০টি ঘরে বন্দীদের সংখ্যা কত? মন্ত্রী আবার তখনি উত্তর দিলেন, ৬৪৮০ জন। মন্ত্রী এত সহজে কি করে উত্তর দিলেন তা জানার ইচ্ছে হল রাজার। মন্ত্রী রাজাকে বুঝিয়ে দিলেন যে, মোট ঘর সংখ্যার সঙ্গে ১ যোগ করে যে মান পাওয়া গেল, সেটিকে ঘর সংখ্যা দিয়ে গুণ করলেই সৈন্যদের সংখ্যা জানা যাবে।

অর্থাৎ সৈন্যসংখ্যা = ঘর সংখ্যা × (ঘর সংখ্যা + ১)

(২) প্রথম থেকে পরপর বিজোড় সংখ্যার যোগফল পাবার উপায় ঃ

রাজার খেয়াল। তিনি মন্ত্রীকে বললেন, আপনার আর একটা পরীক্ষা দিতে হবে। মন্ত্রী ভাবছেন এ আবার কি ফ্যাসাদ। রাজা

বললেন, সবচেয়ে ছোট ঘরে ১ জন সৈন্যকে আটকে রাখতে। তার চেয়ে বড় ঘরে ৩ জনকে, তার পরের বড় ঘরে ৫ জনকে। এইভাবে ১০০টি ঘরে সৈন্যদের সাজাতে বললেন। মন্ত্রী রাজার কথা মত সৈন্যদের বিভিন্ন ঘরে আটকে রাখার ব্যবস্থা করলেন। রাজা জিজ্ঞেস করলেন, এবার মোট কত জনকে ১০০টি ঘরে রাখা গেছে? মন্ত্রী উত্তর দিলেন যে, এবার বন্দীদের মধ্যে ১০০০০ জনকে আটকে রাখা গেছে। রাজার খেয়াল, তিনি বললেন অবশিষ্ট সৈন্যদের মুক্তি দিতে। সুতরাং ১০০ জন ছাড়া পেয়ে গেল।

রাজা মন্ত্রীকে জিজ্ঞেস করলেন, কি করে তিনি এই হিসেবটা করলেন? মন্ত্রী বললেন, মোট ঘর সংখ্যাকে বর্গ করলেই বন্দীদের সংখ্যা জানা যাবে।

অর্থাৎ সৈন্য সংখ্যা = (ঘর সংখ্যা)^{২}

(৩) **এক থেকে একশ'র যোগফল পাবার উপায়ঃ**

একবছর বাদে রাজার ইচ্ছে হল কিছু সৈন্যকে মুক্তি দেবার। রাজার সবকাজেই যেন একটা ছন্দ আছে। তাই তিনি মন্ত্রীকে ডেকে বললেন, সবচেয়ে ছোটঘরে ১জনকে রেখে, তার চেয়ে বড়ঘরে ২জন, তার চেয়ে বড়তে ৩ জন, এইভাবে ১০০টি ঘরে বন্দীদের রাখতে। এতে যদি সব বন্দীরা না ঠাঁই পায় তবে যারা ঠাঁই পাবে না, তাদের তিনি মুক্ত করে দেবেন। মন্ত্রী বললেন, রাজামশাই এতে আপনার মোট যে সংখ্যক সৈন্য ধরা পড়েছিল তার অর্ধেকই ছাড়া পেয়ে যাবে। রাজা খেয়ালী লোক। তিনি বললেন হোক, তবু আমার আদেশ পালন করা চাই। এর ফলে ১০০ ঘরে বন্দীর সংখ্যা এখন দাঁড়াল ৫০৫০ জন। রাজা জিজ্ঞেস করলেন কি করে বন্দীদের হিসেবটা পাওয়া যাবে এবার? মন্ত্রী উত্তর দিলেন, মোট ঘর সংখ্যার সঙ্গে এক যোগ করে যা পাওয়া যাবে তাকে ঘর সংখ্যা দিয়ে গুণ করে গুণফলকে ২

দিয়ে ভাগ করলেই এখনকার বন্দীদের সংখ্যা জানা যাবে। রাজা মন্ত্রীর হিসেবের পদ্ধতিতে খুশি হয়ে তার মাইনের অঙ্কটা বাড়িয়ে দিলেন সেদিন থেকেই।

$$\text{অতএব সৈন্য সংখ্যা} = \frac{\text{ঘর সংখ্যা} \times (\text{ঘর সংখ্যা} + ১)}{২}$$

(৪) সমান্তর প্রগতির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র হলো ঃ

$$S=\frac{n}{2}(a+b)$$

$$\text{বা, } S=\frac{n}{2}\left\{ [2a+(n-I)b] \right\}$$

যেখানে প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অন্তর $=b$, শেষ পদ $=b$ এবং $S=$ পদের সমষ্টি

৫। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের যোগফল ঃ—

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots n^2 \qquad \therefore\ S=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

৬। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনফলের যোগফল

$$S=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

সমান্তর শ্রেণী ও কিছু মিল

ধরা যাক একটি সমান্তর শ্রেণী (২০টা পদ নেওয়া হলো)

১+৩+৫+৭+৯+১১+১৩+১৫+১৭+১৯+২১+২৩ +২৫ +২৭+২৯+৩১+৩৩+৩৫+৩৭+৩৯।

এই সমান্তর শ্রেণীর তৃতীয় এবং উনিশতম পদ দুটি হল ৫ এবং ৩০, এদের যোগফল=৪২। আবার সমান্তর শ্রেণীটির নবম এবং ত্রয়োদশ পদ দুটি হল ১৭ এবং ২৫। এদের যোগফল=৪২।

আবার মিল পাওয়া যেতে পারে যদি দ্বিতীয় ও অষ্টাদশ পদ দুটির যোগফল (অর্থাৎ এখানে ৩ এবং ৩৫-এর যোগফল = ৩৮) নেওয়া হয় এবং অষ্টম ও দ্বাদশ পদের যোগফল নেওয়া হয় (অর্থাৎ এখানে ১৫ এবং ২৩ এর যোগফল = ৩৮)।

এইভাবে চিন্তা করলে আরও কয়েকটি নিয়ম বার করা যায়, যাতে করে দুটো পদের যোগফল অন্য দুটো পদের যোগফলের সমান হবে। নিজেদের ইচ্ছেমত যে কোন সমান্তর শ্রেণী নিয়ে পরীক্ষা করা যেতে পারে, এবং সবক্ষেত্রেই দেখা যাবে যে, বিশেষ বিশেষ পদের যোগফল অন্য দুটি বিশেষ বিশেষ পদের যোগফলের সমান।

সমান্তর প্রগতি ও একটি গোপন সম্পর্ক

তিনটি সমান্তর প্রগতির একই প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর যথাক্রমে পদের 1, 2, 3, এখন যদি S_1, S_2 এবং S_3 যথাক্রমে n সংখ্যক সমষ্টি হয়, তবে $S_1 + S_3 = 2S_2$ হয়।

প্রমাণ : ধরা যাক প্রথম পদ = a

$$\therefore \quad S_1 = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1) \times 1\right\} = \frac{n}{2}\left\{2a + n - 1\right\}$$

$$S_1 = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1) \times 2\right\} = \frac{n}{2}\left\{2a + 2n - 2\right\}$$

$$S_3 = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1) \times 3\right\} = \frac{n}{2}\left\{2a + 3n - 3\right\}$$

$$\therefore \quad S_1 + S_3 = \frac{n}{2}\left\{2a + n - 1\right\} + \frac{n}{2}\left\{2a + 3n - 3\right\}$$

$$= \frac{n}{2}\left\{4a + 4n - 4\right\} = 2 . \frac{n}{2}\left\{2a + 2n - 2\right\}$$

$$= 2.S_2$$

স্কুলে ভর্তি হতে গিয়ে

একবার এক ভদ্রলোক তাঁর ছেলেকে ক্লাশ নাইনে ভর্তি করার জন্য স্কুলের প্রধান শিক্ষকের সঙ্গে দেখা করলেন। ভদ্রলোক বদলি হয়ে এসেছেন, তাই স্কুলে ছেলেকে ভর্তি করতেই হবে। প্রধান শিক্ষক ভদ্রলোকের ছেলেকে পরীক্ষা করে ভর্তি করে নিতে রাজী হলেন। প্রধান শিক্ষক ছেলেটির নাম জিজ্ঞেস করলেন। ছেলেটি নাম বলল, অমল চক্রবর্তী।

নামটা জেনে নিয়ে অমলকে তিনি কাগজ আর কলম দিয়ে কয়েকটা অংক করতে দিলেন।

প্রথমে তিনি ১৮ এবং ২২-এর বর্গ করতে দিলেন। অমল কাগজ-কলম ছাড়াই সঙ্গে সঙ্গে উত্তর দিয়ে দিল।

সে বলল—১৮-এর বর্গ ৩২৪

আর ২২-এর বর্গ ৪৮৪

তারপর তিনি একটু বড় সংখ্যা ৪৮-এর বর্গ করতে দিলেন। অমল কাগজ আর কলম নিয়ে প্রায় সঙ্গে সঙ্গেই উত্তর লিখে দিল। সে উত্তর লিখল ২৩০৪। প্রধান শিক্ষক তার উত্তর দেবার কায়দাটা জানতে চাইলেন। অমল উত্তর দিল যে, সে নিচের সূত্রটি থেকে বর্গগুলো চটপট করে দিচ্ছে।

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2$$

বা, $a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$

এই সূত্রকে সে কাজে লাগিয়েছিল।

a-এর মান যখন ১৮, তখন সে b-এর মান ২ ধরে নিয়ে পেয়েছিল ঃ

$$(১৮)^2 = (১৮+২)(১৮-২) + ২^2$$
$$= ২০ \times ১৬ + ৪ = ৩২০ + ৪ = ৩২৪$$

একই সূত্র মেনে সে ২২ আর ৪৮-এর বর্গ দুটো বার করেছিল।

$$(২২)_2 = (২২+২)(২২-২) + ২^2$$

$$= ২৪ \times ২০ + ৪ = ৪৮০ + ৪ = ৪৮৪$$

$$(৪৮)^2 = (৪৮ + ২)(৪৮ - ২) + ২^2$$

$$= ৫০ \times ৪৬ + ৪ = ২৩০০ + ৪ = ২৩০৪$$

প্রধান শিক্ষক অমলের বাহাদুরি দেখে দুই অংকের বর্গ করার আরেকটা নিয়ম তাকে শিখিয়ে দিলেন।

তিনি বললেন, এই নিয়মটা অবশ্য কাজে লাগাতে পারবে যখন দুই অংকের ডানদিকের অংকটা হবে ৫।

দুই অংকের সংখ্যা নিয়ে বর্গ (যার ডানদিকের অংকটি ৫)

৬৫-এর বর্গ হবে এইভাবে—৫-এর বর্গ হলো ২৫। এই ২৫ সংখ্যাটি ডানদিকে লিখে রাখতে হবে। এরপর ৬-এর সঙ্গে ১ যোগ করে পাওয়া গেল ৭। এই ৭ দিয়ে ৬কে গুণ করে পাওয়া গেল ৪২। ২৫-এর বাঁদিকে এই সংখ্যা দুটি বসিয়ে দিলেই ৬৫ সংখ্যাটার বর্গ পাওয়া যাবে। অর্থাৎ ৬৫ সংখ্যাটির বর্গ হল ৪২২৫।

নিয়মটা হল : ডানদিকের সংখ্যাকে বর্গ করে ২৫ লিখে রাখতে হবে ডানদিকে। এবার বাঁদিকের সংখ্যা এবং তার থেকে বড় পরের সংখ্যা দিয়ে গুণ করে বাঁদিকে বসিয়ে দিতে হবে।

মজার ভাগ যখন ভাগশেষ ১

প্রধান শিক্ষক মহাশয় অমলকে এরপর আরেকটা প্রশ্ন করলেন। তিনি বললেন, ৮ দিয়ে ভাগ করে প্রতিক্ষেত্রেই ভাগশেষ থাকবে ১, এমন চারটে সংখ্যা কি কি ?

অমল বুদ্ধিমান ছেলে, সে চটপট এ ধরনের চারটে সংখ্যা বলে দিল। সে যে চারটে সংখ্যা বলেছিল সেগুলি হলো—

৯, ১৭, ২৫ এবং ৩৩।

প্রধান শিক্ষক মহাশয় উত্তরগুলি শুনে খুশীই হলেন। তিনি বললেন, তোমার উত্তরের সংখ্যাটি লিখে ২ বা ৪ দিয়ে ভাগ করলেও কিন্তু প্রতিক্ষেত্রে ভাগশেষ হবে ১।

অমল একটু ভেবে বলল, হ্যাঁ স্যার—আপনি ঠিকই বলেছেন। প্রধান শিক্ষক বললেন, তোমার উত্তরের চারটে সংখ্যার মধ্যে ছুটো সংখ্যা ৯ আর ২৫ হচ্ছে যথাক্রমে ৩ আর ৫-এর বর্গ। সুতরাং একটা জিনিস তুমি লক্ষ্য করবে যে, যে কোন বিজোড় সংখ্যাকে বর্গ করে যে ফল পাবে সেই বর্গমানটিকে ৮ দিয়ে ভাগ করলে সব সময় ১ ভাগশেষ পাবে। ২ আর ৪ দিয়ে ভাগ করলেও সেই ১ ভাগশেষ পাবে। কি মজার ব্যাপার বলতো! অমল চট করে ব্যাপারটা বুঝে নিল আর তাঁর কথায় সায় দিল। প্রধান শিক্ষক তাকে প্রশ্ন করলেন, তাহলে কি শিখলে বলতো? অমল বলল, যে কোন বিজোড় সংখ্যার বর্গমানকে ৪ বা ৮ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ থাকবে সবসময় ১। প্রধান শিক্ষক অমলের কথায় সন্তুষ্ট হয়ে তাকে ভর্তি করে নিলেন স্কুলে। আর অমল আনন্দে বাড়ি ফিরে এল।

কার কত টাকা

শ্যামল, বিমল, অমল এবং নির্মল এরা চার বন্ধু। একদিনের এক মেলায় একটা ছোট চায়ের দোকান দিয়ে তারা ৪৫ টাকা লাভ করল। লাভের টাকা তারা নিজেদের মধ্যে ভাগ করে নিল। এখন যদি শ্যামল ২ টাকা বেশী পেত, বিমল ২ টাকা কম পেত, অমল দ্বিগুণ টাকা পেত এবং নির্মল অর্ধেক টাকা পেত, তবে প্রত্যেকের টাকার পরিমাণ সমান হত। তবে কে কত টাকা পেল?

উত্তর: ধরা যাক শ্যামল ক টাকা, বিমল খ টাকা, অমল গ টাকা এবং নির্মল ঘ টাকা পেল।

শর্ত অনুযায়ী, ক+খ+গ+ঘ=৪৫

$$\text{এবং, } ক+২=খ-২=২গ=\frac{ঘ}{২}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ & খ=ক+৪ \\ & গ=\frac{ক+২}{২} \\ & ঘ=২(ক+২) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & \therefore\ ক+ক+৪+\frac{ক+২}{২}+২(ক+২)=৪৫ \\ & \text{বা, } ক=৮ \\ & \text{অতএব } খ=১২,\ গ=৫,\ ঘ=২০ \end{aligned}$$

অতএব ৪৫ টাকার মধ্যে শ্যামল ৮ টাকা, বিমল ১২ টাকা, অমল ৫ টাকা এবং নির্মল ২০ টাকা পেল।

(২) আর একবার ঐ চার বন্ধু মিলে একটা মেলায় বই বিক্রী করে ২,৫১৯ টাকা লাভ করল। লাভের টাকা বন্ধুরা এমনভাবে ভাগ করে নিল যে, শ্যামল বিমলের চেয়ে ২০ টাকা, অমলের চেয়ে ৩০ টাকা এবং নির্মলের চেয়ে ৫১ টাকা বেশি পেল। বলতো কে কত টাকা পেল?

উত্তর: ধরা যাক, শ্যামল ক টাকা পেল। অতএব বিমল (ক−২০) টাকা, অমল (ক−৩০) টাকা এবং নির্মল (ক−৫১) টাকা পেল। এখন, শর্তানুযায়ী এই চারজনের টাকার পরিমাণ =২,৫১৯

$$\text{বা } ক+(ক-২০)+(ক-৩০)+(ক-৫১)=২,৫১৯$$

$$\text{বা, } ৪ক-১০১=২,৫১৯$$

$$\text{বা, } ৪ক=২,৫১৯+১০১=২,৬২০$$

$$\text{বা, } ক=\frac{২৬২০}{৪}=৬৫৫$$

∴ ক টাকা = ৬৫৫ টাকা এবং এই পরিমাণ পায় শ্যামল।

এবং বিমল পায় ৬৫৫-২০=৬৩৫ টাকা, অমল পায় ৬৫৫−৩০=৬২৫ টাকা এবং নির্মল পায় ৬৫৫−৫১=৬০৪ টাকা।

যে অংক সবাইকে বোকা বানাল

অমল ক্লাসের পরীক্ষায় প্রথম হয়ে সেবার নাইন থেকে টেনে উঠল। অংকের পরীক্ষাও সে ভাল দিয়েছিল। কিন্তু একটা অংক সে করতে পারেনি। যে অংকটা অমল এবং ক্লাসের অন্যান্য ছেলেরা করতে পারেনি সেটা এখানে দিলাম। দেখা যাক, তোমরা কেমন করতে পার।

কোন আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির মান পূর্ণসংখ্যা। যদি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার মান আয়তের ক্ষেত্রফলের মানের সমান হয়, তবে বাহুগুলির মান কত?

সমাধানঃ ধরা যাক আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ক এবং প্রস্থ খ। অতএব শর্তানুযায়ী আমরা পাই,

পরিসীমার মান = ক্ষেত্রফলের মান

$$২ক + ২খ = কখ \quad \left[\begin{array}{l} পরিসীমা = ২ক + ২খ \\ ক্ষেত্রফল = কখ \end{array}\right]$$

বা, $২খ = কখ - ২ক = ক(খ - ২)$

$$\therefore ক = \frac{২খ}{খ - ২}$$

এবার যেহেতু ক ও খ উভয়ই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা,

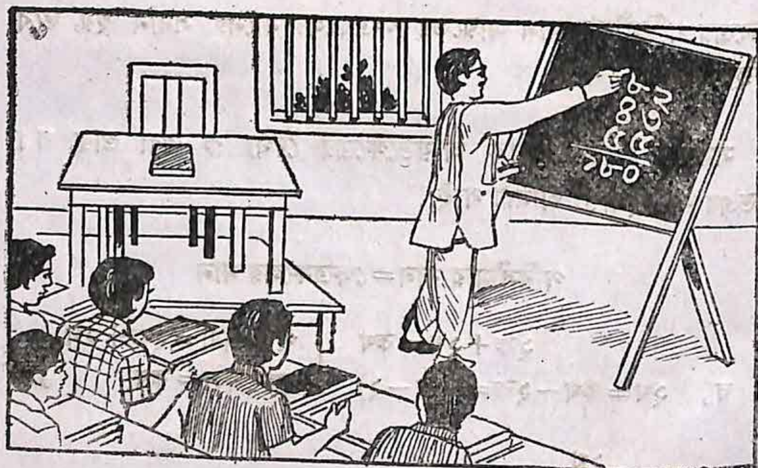
অতএব (খ − ২)-এর মানও ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হবে। অর্থাৎ খ-এর মান ২-এর বেশী হবে।

এখন, $ক = ২ + \frac{৪}{খ - ২}$

যেহেতু, ক একটি পূর্ণসংখ্যা, সুতরাং $\frac{৪}{খ - ২}$ একটি পূর্ণসংখ্যা হবে।

কিন্তু যখন খ-এর মান ২-এর বেশী, ক-এর মান পূর্ণ হবে যদি খ-এর মান ৩, ৪ বা ৬ হয় এবং ক-এর মান তখন ৬, ৪ এবং ৩ হবে। এবার 'ক' যেহেতু দৈর্ঘ্য এবং 'খ' হচ্ছে প্রস্থ, অতএব ক = ৬ এবং খ = ৩।

সুতরাং আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির মান ৩ এবং ৬ হবে বা ক্ষেত্রটি বর্গ হলে বাহুর মান ৪ হবে।



প্রধান শিক্ষক ছেলেদের অংক শেখাচ্ছেন

ঘড়ি ও সময় নিয়ে অংক

ঘড়ির কাঁটা বিভিন্ন সময়ে কোন্ ঘরে থাকবে তা জানতে হলে নিচের কয়েকটি কথা মনে রাখতে হবে—

(i) মিনিটের কাঁটা যে সময়ে ৬০ মিনিট ঘর যায় সেই সময়ে ঘণ্টার কাঁটা ৫ মিনিট ঘর যায়।

∴ মিনিটের কাঁটা যে সময়ে ১৫ মিনিট ঘর যায়, সেই সময়ে

ঘণ্টার কাটা যায় $\frac{৫ \times ১৫}{৬০} = \frac{১৫}{১২}$ মিনিট ঘর।

(ii) দুটি কাঁটার মধ্যে ১৫ মিনিট ঘর ব্যবধান থাকলে তারা ১ সমকোণ বা ৯০° কোণ উৎপন্ন করে।

(iii) দুটি কাঁটা একই সরলরেখায় যাবে অর্থাৎ সরলকোণ (১৮০°) সৃষ্টি হয় তবে কাঁটা দুটি হয় গায়ে গায়ে থাকবে নতুবা তাদের মধ্যে ৩০ মিনিট ঘরের ব্যবধান থাকবে।

প্রশ্ন ঃ—৫টা ও ৬টার মধ্যে (i) কখন ঘড়ির কাঁটা দুটি পরস্পর সমকোণে থাকবে ? (ii) কখন একই সঙ্গে (অর্থাৎ একত্রিত) থাকবে ?

উত্তর ঃ—(i) যখন ৫টা বাজে তখন মিনিটের কাঁটা ও ঘণ্টার কাঁটার মধ্যে ব্যবধান থাকে ২৫ মিনিট ঘর।

এখন কাঁটা দুটির মধ্যে ১৫ মিনিট-ঘর ব্যবধান হলে, কাঁটা দুটি

সমকোণ থাকবে। এবার (ক) মিনিটের কাঁটাটি ঘণ্টার কাঁটা থেকে ১০ মিনিট-ঘর বেশি গেলে তাদের মধ্যে (২৫−১০) বা ১৫ মিনিট ঘর ব্যবধান হয় বা (খ) মিনিটের কাঁটাটি ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা (২৫+১৫) বা ৪০ মিনিট-ঘর বেশি গেলে তারা সমকোণে থাকবে।

ধরা যাক, ৫টা বেজে x মিনিট পরে কাঁটা দুটি যেন পরস্পর সমকোণে থাকবে।

∴ x মিনিট, মিনিটের কাঁটা x মিনিট-ঘর এবং ঘণ্টার কাঁটা $\frac{x}{১২}$ মিনিট-ঘর যায় বলে

(ক) $x - \frac{x}{১২} = ১০$ এবং (খ) $x - \frac{x}{১২} = ৪০$

বা, $\frac{১১x}{১২} = ১০$ বা, $\frac{১১x}{১২} = ৪০$

$\therefore\ x = \frac{১০ \times ১২}{১১} = ১০\frac{১০}{১১}$

$\therefore\ x = \frac{৪০ \times ১২}{১১} = ৪৩\frac{৭}{১১}$

সুতরাং, ৫টা বেজে $১০\frac{১০}{১১}$ মিনিটে বা ৫টা বেজে $৪৩\frac{৭}{১১}$ মিনিটে কাঁটা দুটি পরস্পর সমকোণে থাকবে।

(ii) যখন মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটা থেকে ২৫ মিনিট-ঘর বেশি যাবে তখন কাঁটা দুটি পর পর মিলে যাবে।

ধরা যাক, ৫টা বেজে x মিনিট পরে কাঁটা দুটি মিলবে।

$\therefore$ $x - \frac{x}{১২} = ২৫$ বা, $\frac{১১x}{১২} = ২৫$

বা, $x = \frac{২৫ \times ১২}{১১} = ২৭\frac{৩}{১১}$

$\therefore$ ৫টা ২৭ $\frac{৩}{১১}$ মিনিটের সময় কাঁটা দুটি মিলে থাকবে!

অংকের ধাঁধা ও মজা

আমার এক বন্ধু একবার আমাদের বাড়িতে বেড়াতে এল। সে খুব ভাল ধাঁধা জানত। এছাড়া অংকে সে ছিল খুব ভাল। বহুদিন বাদে সে এসেছে। তাকে দেখে আমার ভাই দীপংকর বলল, রমেশদা আপনাকে আজ কতগুলো অংকের ধাঁধা শোনাতে হবে। ভায়ের আবদার রমেশ ঠেলতে পারল না। সেদিন যে যে ধাঁধা ভাইকে সে শুনিয়েছিল সেগুলি তোমাদের শোনাই।

(১) আপাতভাবে কি করে দেখান যাবে ২ = ১

ধরা যাক $a = b$

বা, $a^2 = ab$

বা, $a^2 - b^2 = ab - b^2$

বা, $(a+b)(a-b) = b(a-b)$

বা, $(a+b) = b$ [উভয় পক্ষকে $(a-b)$ দ্বারা ভাগ করলে]

বা, $b+b=b$

বা, $2b=b$

বা, $2=1$

ভুলটা কোথায়?

[যেখানে $(a-b)$ দিয়ে উভয় পক্ষকে ভাগ করা হয়েছে সেই ধাপটি থেকেই অংকটি ভুল হলো, কারণ $a-b=0$ হলে $(a-b)$ দিয়ে উভয় পক্ষে ভাগ করা যায় না।]

(২) আপাতভাবে কি করে দেখান যাবে ২ = ৩

আমরা ১ = ২ এক চালাকি করে প্রমাণ করেছি, ঠিক আরেক চালাকি করে প্রমাণ করতে পারি ২ = ৩। তোমরা চালাকিটা ধরতে পার কিনা দেখ, অর্থাৎ কোন্ ধাপে ভুলটা রইল সেটা ধরা যায় কিনা দেখ। আর যদি ধরতে না পার তবে দেখবে ২ = ৩ হয়ে গেছে।

কিভাবে প্রমাণ করছি দেখ—

প্রথমে লিখছি $-৬=-৬$

এবার দু'পক্ষকে নিচের মত করে লিখতে পারি—

$$৪-১০=৯-১৫$$

এবার দু'পক্ষে $\frac{২৫}{৪}$ যোগ করা হলো আর তাতে আমরা পাই—

$$৪-১০+\frac{২৫}{৪}=৯-১৫+\frac{২৫}{৪}$$

বা, $(২)^২-২.২.\frac{৫}{২}+\left(\frac{৫}{২}\right)^২=(৩)^২-২.৩.\frac{৫}{২}+\left(\frac{৫}{২}\right)^২$

$$\text{বা, } (২-\tfrac{৫}{২})^২=(৩-\tfrac{৫}{২})^২$$

$$\text{বা, } ২-\tfrac{৫}{২}=৩-\tfrac{৫}{২}$$

এবার দু'পক্ষে $\frac{৫}{২}$ যোগ করে আমরা পাই—

$$২-\tfrac{৫}{২}+\tfrac{৫}{২}=৩-\tfrac{৫}{২}+\tfrac{৫}{২}$$

$$\text{বা, } ২=৩$$

[ভুলটা যদি ধরতে না পেরে থাক, তবে সেটা ধরিয়ে দিই। বর্গ অর্থাৎ ২ সূচক থেকে ১ সূচকে আসার পদটি হল ভুল, কেন না আমরা জানি $(-২)^২=(২)^২$

কিন্তু এর থেকে বলতে পারি না যে,—২ এবং ২ পরস্পর সমান।]

(৩) তিনটে ঘণ্টা তিন সেকেণ্ডে বাজলে দশটা ঘণ্টা কত সেকেণ্ডে বাজবে ?

উত্তর : ছয় সেকেণ্ডে।

প্রথম ঘণ্টাটি বাজার সময়টি ধরা হচ্ছে না। কারণ প্রথম ঘণ্টা থেকে দ্বিতীয় ঘণ্টা পড়ার সময় হচ্ছে এক সেকেণ্ড। এবং মোট দশটি ঘণ্টার একটি প্রথমে ধরে নেওয়া হয়েছে বলে, বাকী ৯টি ঘণ্টা পড়ার সময় বার করতে হবে।

অতএব, ৩টি ঘণ্টা পড়ে ২ সেকেণ্ডে

বা, ১ ঘণ্টা পড়ে $\frac{২}{৩}$ „

∴ ৯ „ „ $\frac{২}{৩}\times ৯=৬$ সেকেণ্ডে

(৪) একটি বাগানে সাতটা বাইরে যাবার গেট আছে এবং প্রতি গেটে একজন করে পাহারাদার আছে। একজন লোক ঐ বাগান থেকে কিছু ফুল ছিঁড়ল। লোকটি প্রথম গেটের পাহারাদারকে মোট ফুলের অর্ধেক দিয়ে একটা আবার ফিরিয়ে নিল। দ্বিতীয়, তৃতীয় এমন করে সাতটা গেটের প্রত্যেক পাহারাদারকে প্রতিবার যে সংখ্যক ফুল অবশিষ্ট থাকে তার অর্ধেক দিয়ে একটা করে ফেরত নিল। এইভাবে সাতটি গেট পার হয়ে যখন সে ফিরল তখন তার কাছে দুটো ফুল রইল। সে কতগুলি ফুল ছিঁড়েছিল?

উত্তর : ২টি ফুল সে ছিঁড়েছিল।

(৫) কোন এক স্থানের নিয়ম এই যে, ৪ টাকাকে খুচরো পয়সায় করলে ৩ টাকার খুচরো পাওয়া যাবে। এক ভদ্রলোক তার চাকরকে প্রত্যহ ১৬ টাকা ভাঙ্গাতে দিতেন। চাকরটি হিসেব মত ১২ টাকার খুচরো এনে মনিবকে দিত। অথচ দেখা গেল চাকরটি কিছু টাকা প্রতি মাসেই জমিয়ে ফেলছে। আর সে টাকা দিয়ে মাঝে মধ্যে জামা, জুতো ও সখের জিনিস কিনতে লাগল। কি করে এটা সম্ভব?

উত্তর : চাকরটি ১৬ টাকার থেকে ৪ টাকা সরিয়ে রাখল। হাতে রইল ১২ টাকা। এই ১২ টাকাকে খুচরো করতে সে ১২ টাকার খুচরো পেল এবং এরজন্য সে ৩ টাকা দিল তার সরিয়ে রাখা ৪ টাকা থেকে। এইভাবে প্রতিদিন চাকরটি ১টি টাকা বাঁচিয়ে কিছু টাকা জমিয়ে ফেলল।

(৬) দু'জন ছেলেকে তাদের বাবারা দুর্গাপূজা উপলক্ষে কিছু করে টাকা দিয়েছিলেন এক সেট করে জামা-প্যাণ্ট বানাবার জন্য। একজন তাঁর ছেলেকে ৪৫০ টাকা দিলেন এবং আর একজন দিলেন ২৫০ টাকা। দুই ছেলের টাকা একত্র করে দেখা গেল যে, তাদের কাছে মাত্র ৪৫০ টাকা আছে। তাহলে বাকী ২৫০ টাকা কোথায় গেল ?

উত্তর :—

এখানে দুই ছেলে আর দুই বাবা মিলে হিসেবে মোট চারজন হলেও, আসলে ঠাকুর্দা, বাবা ও ছেলে এই তিনজনের মধ্যেই ব্যাপারটা ঘটেছে। এখন বোঝাবার সুবিধার জন্য ঠাকুর্দা, বাবা ও ছেলেকে যথাক্রমে ক, খ এবং গ নামে পরিচয় করা যাক।

অতএব ক (ঠাকুর্দা) তাঁর ছেলেকে (খ-কে) ৪৫০ টাকা দিলেন। এবং খ তাঁর ছেলে গ-কে ঐ ৪৫০ টাকা থেকে ২৫০ টাকা দিলেন।

অতএব খ-এর কাছে রইল ৪৫০ − ২৫০ = ২০০ টাকা। এবং গ পেল ২৫০ টাকা।

এখন দুই ছেলে অর্থাৎ খ এবং গ-এর কাছে আছে ২০০ + ২৫০ = ৪৫০ টাকা।

সুতরাং হিসেবে কোন গোলমাল নেই।

(৭) একটা ছক দেওয়া আছে

উত্তর

পশ্চিম				পূর্ব
		৮		
পশ্চিম	৮	২০	৮	পূর্ব
		৮		

দক্ষিণ

এই ছকের সংখ্যাগুলোর মধ্যে মোট ১৬ যোগ করে দেওয়া হল, কিন্তু উত্তর থেকে দক্ষিণমুখী সংখ্যাগুলোর যোগফল আর পশ্চিম থেকে পূর্বমুখী সংখ্যাগুলির যোগফল একই থেকে গেল। প্রথম ছকের সঙ্গে পরের ছকের কেমন যেন মিলও পাওয়া গেল।

নতুন ছকটা কেমন হবে ?

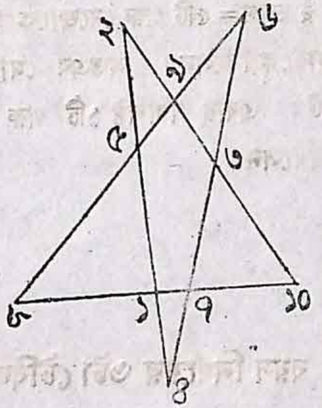
সমাধান :—নতুন ছকটা হবে—

	১৬	
১৬	৪	১৬
	১৬	

(৮) এক মাঠে দশটি বাঁশ আছে। বাঁশগুলিকে পাঁচটি সারিতে এমন করে সাজাতে হবে যেন, প্রতি সারিতে চারটি বাঁশ থাকে।

উত্তর : তারার মত দেখতে একটা ছক কেটে প্রতি লাইনের

ছেদে এবং প্রতি কোণে একটি করে নম্বর বসালেই দশটি সংখ্যা



পাওয়া যাবে প্রতিটি সংখ্যায় একটি করে দশটি বাঁশকে পাঁচটি সারিতে সাজান যাবে।

একটি লোক ও তার গরু

একজন লোকের ১৯টি গরু ছিল। লোকটির ইচ্ছে ছিল গরুগুলিকে তিন ছেলেকে এমনভাবে ভাগ করে দেবেন যে, মোট গরুর $\frac{1}{2}$ ভাগ বড়কে, $\frac{1}{4}$ ভাগ মেজোকে এবং $\frac{1}{5}$ ভাগ ছোটকে দেবেন। তিনি ভাগ করতে অসুবিধের সম্মুখীন হলেন, কারণ ১৯টি গরুকে এভাবে ভাগ করা যায় না। তিনি সাময়িকভাবে এক বন্ধুর কাছ থেকে কিছু সাহায্য নিলেন এবং ছেলেদের মধ্যে গরুগুলি ভাগ করে দিয়ে বন্ধুর ঋণ শোধ করে দিলেন। বন্ধুর কাছ থেকে তিনি কিভাবে সাহায্য নিলেন এবং কিভাবে ঋণ শোধ করলেন ?

উত্তর ঃ—বন্ধুর কাছ থেকে ১টি গরু চেয়ে নিলেন। এতে মোট গরুর সংখ্যা দাঁড়াল ২০টি। ২০টির $\frac{১}{২}$ ভাগ=১০টি গরু বড়কে দিলেন। ২০টির $\frac{১}{৪}$ ভাগ=৫টি গরু মেজোকে দিলেন এবং ১০টির $\frac{১}{৫}$ ভাগ=৫টি গরু ছোটকে দিলেন। অতএব মোট গরু দান করা হল ১০+৫+৪=১৯টি। এবার অবশিষ্ট ১টি গরু যা বন্ধু দিয়েছিলেন, তা বন্ধুকে ফিরিয়ে দিলেন।

বয়স নির্ণয়ের ৬টা টেবিল

নিচের এই ৬টা টেবিল থেকে কোনো লোকের বয়স আমরা সহজেই বলে দিতে পারবো। তবে লোকটির বয়স যেন ৬০-এর বেশি না হয়।

কোনো লোককে আমরা তার বয়স জিজ্ঞেস না করে বলব শুধু তার বয়সটি কোন্ কোন্ টেবিলে আছে তা দেখতে এবং সেই সেই টেবিলের নম্বরগুলি আমাদের বলতে। টেবিলের নম্বরগুলি জেনে সেই সেই টেবিলের উপরের সারির একদম ডান দিকের কোণের সংখ্যাগুলি নিয়ে যোগ করলেই লোকটির বয়স পেয়ে যাব। আর কোনো দ্বিধা না করে লোকটিকে তার বয়স বলে দিতে পারব।

টেবিল কিভাবে তৈরী করা যাবে ?

১ম টেবিলে ১ থেকে শুরু করে ৫৯ পর্যন্ত প্রতিটি বিজোড় সংখ্যা রাখতে হবে। এবং এই টেবিল থেকে নেব শুধু ১।

২য় টেবিলে থাকবে ২, ৩ ইত্যাদি।

এই টেবিল থেকে নেব ২। ৪, ৮, ১৬, ৩২ দিয়ে যেখানে কাজ মিটে যাবে সেখানে ২য় টেবিলের কোন দরকার থাকছে না।

১

৩	৫	৭	৯	১১	১
১৫	১৩	১৭	১৯	২১	২৩
২৫	২৭	২৯	৩১	৩৩	৩৫
৩৭	৩৯	৪১	৪৩	৪৫	৪৭
৪৯	৫১	৫৩	৫৫	৫৭	৫৯

২

৩	৬	৭	১০	১১	২
১৪	১৫	১৮	১৯	২২	২৩
২৬	২৭	৩০	৩১	৩৪	৩৫
৩৮	৩৯	৪২	৪৩	৪৬	৪৭
৫০	৫১	৫৪	৫৫	৫৮	৫৯

৩

৫	৬	৭	১৩	১২	৪
১৫	১৪	২০	২১	২২	২৩
২৮	২৯	৩০	৩১	৩৬	৩৭
৫২	৩৮	৩৯	৪৪	৪৫	৪৬
৪৭	৫৩	৫৪	৫৫	৬০	১২

৪

৯	১০	১১	১২	১৩	৮
১৪	১৫	২৪	২৫	২৬	২৭
২৮	২৯	৩০	৩১	৪০	৪১
৪২	৪৩	৪৬	৪৫	৪৬	৪৭
৫৬	৫৭	৫৮	৫৯	৬০	১৫

৫

১৭	১৮	১৯	২০	২১	১৬
২২	২৩	২৪	২৫	২৬	২৭
২৮	২৯	৩০	৩১	৪৮	৪৯
৫০	৫১	৫২	৫৩	৫৪	৫৫
৫৬	৫৭	৫৮	৫৯	৬০	৩০

৬

৩৩	৩৪	৩৫	৩১	৩৭	৩২
৩৮	৩৯	৪০	৪১	৪২	৪৩
৪৪	৪৫	৪৬	৪৭	৪৮	৪৯
৫০	৫১	৫২	৫৩	৫৪	৫৫
৫৬	৫৭	৫৮	৫৯	৪০	৬০

৩য় টেবিল থেকে নেব ৪। সুতরাং ৪, ৫, ৬, ৭ ইত্যাদি সংখ্যার জন্য এবং (৮ + ৪) থেকে শুরু করে ১৫ পর্যন্ত এই টেবিল কাজে লাগবে। এরপর (১৬ + ৪) থেকে শুরু করে ২৩ অবধি কাজে লাগবে, ২৪ থেকে ২৭ পর্যন্ত এই টেবিল লাগবে না, কারণ ১৬-এর সঙ্গে ৮ এবং প্রয়োজন মত ১ এবং ২-এর টেবিলের সাহায্যে সংখ্যাগুলো পেয়ে যাব।

৬নং টেবিলটি ৩২-এর উপরে যে কোন সংখ্যার জন্য কাজে লাগবে।

৩৩-এর জন্য ৬নং টেবিল এবং ১নং টেবিল কাজে লাগবে।

৩৪-এর জন্য ৬নং টেবিল এবং ২নং টেবিল কাজে লাগবে।

৩৫-এর জন্য (৩৫ = ৩২ + ২ + ১) ৬নং, ২নং এবং ১নং টেবিলগুলি কাজে লাগবে।

৩৬-এর জন্য (৩৬ = ৩২ + ৪) ৬নং এবং ৩নং টেবিল দুটি কাজে লাগবে।

৪০-এর জন্য (৪০ — ৩২ + ৮) ৬নং এবং ৪নং টেবিল দুটি কাজে লাগবে।

৪৮-এর জন্য (৪৮ = ৩২ + ১৬) ৬নং এবং ৫নং এই দুটি টেবিল কাজে লাগবে। বাকী সংখ্যাগুলি বুদ্ধি খাটিয়ে এইভাবে কোন্ কোন্ টেবিল থেকে পাওয়া যাবে সহজেই বোঝা যাবে।

১৬ থেকে ৩১ এই সংখ্যাগুলির জন্য ৫নং টেবিল এবং তার সঙ্গে যেমন দরকার তেমন টেবিলের সাহায্য নিতে হবে।

কোন্ কোন্ টেবিলের সাহায্যে ২৪ এবং ৩১ সংখ্যা দুটি আমরা পাব?

আমরা সংখ্যা দুটিকে নিচের মত করে ভেঙ্গে নিয়ে সেইমত টেবিল দেখে নেব।

২৪ = ১৬ + ৮ (৫নং এবং ৪নং টেবিল দেখতে হবে।)

৩১ = ১৬ + ৮ + ৪ + ২ + ১ (৫নং, ৪নং, ৩নং, ২নং, এবং ১নং টেবিল দেখতে হবে।)

৮ থেকে ১৫ সংখ্যাগুলির জন্য

৪নং টেবিল এবং তার সঙ্গে যেমন দরকার তেমন টেবিলের সাহায্য নিতে হবে।

১০=৮+২ (৪নং এবং ২নং টেবিল দেখতে হবে।)

১৩=৮+৪+১ (৪নং, ৩নং এবং ১নং টেবিল দেখতে হবে।)

৪ থেকে ৮-এর জন্য

৬=৪+২ (৩নং এবং ২নং টেবিল দেখতে হবে।)

৫=৪+১ (৩নং এবং ১নং টেবিল দেখতে হবে।)

২ এবং ৩-এর জন্য

২-এর জন্য ২নং টেবিল দেখতে হবে।

৩-এর জন্য (৩=২+১) ২নং এবং ১নং টেবিল দেখতে হবে।

১-এর জন্য ১নং টেবিল দেখতে হবে।

এগুলো দেখে একটু চিন্তা করলেই বোঝা যাবে কোন্ টেবিলে কি কি সংখ্যা থাকবে।

প্রতিটি সংখ্যাকে এখানে বয়স বোঝান হয়েছে।

কয়েকটি ম্যাজিক বর্গ

(১) ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সবকটি সংখ্যা একবার করে ব্যবহার করে ন'টি ঘরে বসান হলো। এমনভাবে সংখ্যাগুলো বসান হলো যে, বাঁদিক থেকে ডান দিক বরাবর বা উপর থেকে নীচ বরাবর বা কোণাকুণি দিক দিয়ে যোগফল হবে ১৫।

২	৯	৪
৭	৫	৩
৬	১	৮

১নং ছক

পাশাপাশি
- ২+৯+৪=১৫
- ৭+৫+৩=১৫
- ৬+১+৮=১৫

উপর-নীচ
- ২+৭+৬=১৫
- ৯+৫+১=১৫
- ৪+৩+৮=১৫

কোণাকুণি
- ২+৫+৮=১৫
- ৪+৫+৬=১৫

(২) ১ থেকে ১৬ পর্যন্ত সবকটি সংখ্যা একবার করে ব্যবহার করে ১৬টি ঘরে বসান হলো। সংখ্যাগুলো এমনভাবে বসান হলো

যে, পাশাপাশি বা উপর-নীচ বা কোণাকুণি দিক দিয়ে সংখ্যাগুলি যোগ করলে যোগফল হবে ৩৪।

১৬	২	৩	১৩
৫	১১	১০	৮
৯	৭	৬	১২
৪	১৪	১৫	১

২নং ছক

পাশাপাশি
১৬+২+৩+১৩=৩৪
৫+১১+১০+৮=৩৪
৯+৭+৬+১২=৩৪
৪+১৪+১৫+১=৩৪

উপর-নীচ
১৬+৫+৯+৪=৩৪
২+১১+৭+১৪=৩৪
৩+১০+৬+১৫=৩৪
১৩+৮+১২+১=৩৪

কোণাকুণি
১৬+১১+৬+১=৩৪
১৩+১০+৭+৪=৩৪

(৩) ৩ থেকে ১৮ পর্যন্ত সকলটি সংখ্যা একবার করে ব্যবহার করে ষোলটি ঘরে বসান হলো। সংখ্যাগুলো এমনভাবে বসান হলো যে, বাঁদিক থেকে ডান দিক বরাবর বা উপর থেকে নীচ বরাবর বা কোণাকুণি দিক দিয়ে যোগফল হবে ৪২।

৩	১৮	১৫	৬
১৩	৮	৯	১২
১০	১১	১৪	৭
১৬	৫	৪	১৭

৩নং ছক

পাশাপাশি
৩+১৮+১৫+৬ =৪২
১৩+৮+৯+১২ =৪২
১০+১১+১৪+৭=৪২
১৬+৫+৪+১৭ =৪২

উপর-নীচ
৩+১৩+১০+১৬=৪২
১৮+৮+১১+৫ =৪২
১৫+৯+১৪+৪ =৪২
৬+১২+৭+১৭ =৪২

কোণাকুণি
৩+৮+১৪+১৭=৪২
৬+৯+১১+১৬=৪২

(৪) ১ থেকে ১৫ পর্যন্ত সব কটি সংখ্যা ভিন্ন ভিন্ন জায়গায় একবার করে বসান হয়েছে। সংখ্যাগুলো এমনভাবে বসান হলো যে, পাশাপাশি বা উপর-নীচ বা কোণাকুণি দিক দিয়ে সংখ্যাগুলির যোগফল হবে ৬৫।

১৭	২৪	১	৮	১৫
২৩	৫	৭	১৪	১৬
৪	৬	১৩	২০	২২
১০	১২	১৯	২১	৩
১১	১৮	২৫	২	৯

৪নং ছক

১৭+২৪+১+৮+১৫=৬৫ (পাশাপাশি)

১৭+২৩+৪+১০+১১=৬৫ (উপর-নীচ)

১৭+৫+১৩+২১+৯=৬৫ (কোণাকুণি)

এরকমভাবে আমরা আরো কিছু সংখ্যক পাশাপাশি, উপর-নীচ বা একটি কোণাকুণি সংখ্যার যোগফল ৬৫ দেখাতে পারি।

(৫) তোমাদের নানাধরনের ম্যাজিক বর্গের কথা বলা হয়েছে। এখন এমন ম্যাজিক বর্গও তৈরী করা যায় বিভিন্ন ১৬টা সংখ্যা ব্যবহার করে, যাতে বর্গের বিভিন্ন দিকের সংখ্যাগুলির যোগফল শূন্য হয়। তবে এখানে সংখ্যাগুলো সব সময় ধনাত্মক নয়। এর অনেকগুলো ঋণাত্মক আছে। শুধু তাই নয় ধনাত্মক সংখ্যার চেয়ে ঋণাত্মক সংখ্যাই বেশী। ধনাত্মক সংখ্যা যেখানে ৬টি, ঋণাত্মক সংখ্যা সেখানে ১০টি। এবারে ছকের দিকে তাকিয়ে দেখ, প্রতি লাইনে যোগফল শূন্য হয়

কিনা। দেখবে উপর-নীচ বা পাশাপাশি বা কোণাকুণি সংখ্যাগুলির যোগফল সব সময় শূন্য অর্থাৎ উপরের ছকটি ম্যাজিক বর্গ, যার সংখ্যাগুলোর যোগফল শূন্য।

-২৩	-১৫	-৬	৪৪
৭	৩১	-২১	-১৭
২৬	-১৩	৩	-১৬
-১০	-৩	২৪	-১১

৫নং ছক

পাশাপাশি
$$\begin{cases} -২৩-১৫-৬+৪৪=০ \\ ৭+৩১-২১-১৭=০ \\ ২৬-১৩+৩-১৬=০ \\ -১০-৩+২৪-১১=০ \end{cases}$$

উপর-নীচ
$$\begin{cases} -২৩+৭+২৬-১০=০ \\ -১৫+৩১-১৩-৩=০ \\ -৬-২১+৩+১৪=০ \\ ৪৪-১৭-১৬-১১=০ \end{cases}$$

কোণাকুণি
$$\begin{cases} -২৩+৩১+৩-১১=০ \\ ৪৪-২১-১৩-১০=০ \end{cases}$$

(৬) **ম্যাজিক বর্গ তৈরীর কৌশল** : (ক) যদি কোন ম্যাজিক বর্গ (জোড় সংখ্যক ঘরে) করতে হয় তবে ঘরগুলিকে প্রথমে সহজভাবেই

ভরে দিতে হবে। ধরা যাক, ম্যাজিক বর্গে মোট ১৬টি ঘর আছে। এবার ১ থেকে ১৬ পর্যন্ত সংখ্যাগুলি এক এক করে সাজিয়ে দিয়ে একটা ছক (৬নং) পাওয়া গেল।

১	২	৩	৪
৫	৬	৭	৮
৯	১০	১১	১২
১৩	১৪	১৫	১৬

৬নং ছক

এবার (৬নং) ছকটির কর্ণ দুটির সংখ্যাগুলিকে ঘুরিয়ে দিলে পাওয়া যাবে (২নং) ছক।

২নং ছকটির পাশাপাশি, উপর-নীচ এবং কোণাকুণি সংখ্যাগুলির যোগফল ৩৪।

(খ) যখন কোন ম্যাজিক বর্গে বিজোড় সংখ্যক ঘর থাকে (যেমন, ১নং ছকে ৯টি ঘর) এবং আমরা ১নং ছকটি তৈরী করতে চাই, তখন অন্যভাবে ম্যাজিক বর্গ সাজাতে হবে। এখন পাশাপাশি, উপর-নীচ ও কোণাকুণি প্রতিটি দিকের যোগফল ১৫ এবং প্রতি দিকে ঘর সংখ্যা ৩। অতএব গড় হচ্ছে $\frac{১৫}{৩}=৫$। এই ৫ সংখ্যাকে ছকের মধ্যের ঘরে বসাতে হবে।

এবার ১৫-কে বিভিন্ন রকমে লিখে সাজান যায়ঃ

৪ + ৫ + ৬ = ১৫

৩ + ৫ + ৭ = ১৫

২ + ৫ + ৮ = ১৫

১ + ৫ + ৯ = ১৫

দেখা যাচ্ছে যে, বিজোড় সংখ্যার ২টি সেট আর জোড় সংখ্যার ২টি সেট ৫কে মাঝে নিয়ে মোট ৪টি সেট আছে।

এবার জোড় সংখ্যার সেটকে কোণাকুণি সাজালে আমরা ম্যাজিক বর্গের অনেকটা সাজাতে পারব। বাকীটা সহজেই পূর্ণ করা যাবে।

মজার ম্যাজিক বর্গ

৬ বছর আগে ছিল ১৯৮২ সাল। এবার একটি বর্গ সাজানো হবে যার পাশাপাশি, উপর-নীচ ও কোণাকুণি সংখ্যাগুলি যোগ করলে ১৯৮২ পাবে।

৪০২	৪২৫	৩৭৭	৩৮৮	৩৯০
৪২৮	৩৭৮	৩৮০	৩৯২	৪০৪
৩৭০	৩৮২	৪০৫	৪০৭	৪১৮
৩৮৪	৩৯৭	৪০৮	৪১০	৩৮৩
৩৯৮	৪০০	৪১২	৩৮৫	৩৮৭

৭নং ছক

এরপর ১৯৮৩ সাল। এই বছরের মানটি বা তার পরের বছরের মানটি ম্যাজিক বর্গ থেকে কি করে পাওয়া যাবে? হতাশ হবার কিছু নেই। ওপরে যে ছক দেওয়া আছে সেই ছকের যে যে সংখ্যাকে গোল করে দাগ দেওয়া আছে সেখানে ১ যোগ করলে ১৯৮৩, ২ যোগ করলে ১৯৮৪, ৩ যোগ করলে ১৯৮৫ সালকে খুঁজে পাবে। এভাবে তোমরা নিজেদের প্রয়োজন মত সালের ছক বানিয়ে নিতে পারবে।

৫

অংক মাতে আনন্দে

কোন্ তারিখ কি বার ?

যে কোন তারিখ কি বার তা তোমরা জানতে যদি চাও তবে আমি তোমাদের একটা নিয়ম বলে দিতে পারি। নিয়মটার দিকে একটু মন দিলেই ব্যাপারটা পরিষ্কার হয়ে যাবে। ধরা যাক, তুমি তোমার বন্ধুর বা কোনো মনীষীর জন্ম তারিখ জান, তবে তুমি একটু হিসেব করেই বলে দিতে পার সেদিন কি বার ছিল। শুধু জন্ম তারিখ কেন অন্নপ্রাশন, উপনয়ন, বিবাহ, মৃত্যু বা উল্লেখযোগ্য যে কোন দিনের তারিখ জানা থাকলে তুমি সহজেই সেই সেই তারিখের বারগুলো খুঁজে পেতে পারো। ধরা যাক, বিংশ শতাব্দীর মধ্যের (অর্থাৎ ১৯০০ থেকে ১৯৯৯ সাল) যে কোন তারিখ কি বার তুমি জানতে চাও, আর তাহলে তোমাকে কি করতে হবে তা এবারে সহজ করে বলি।

ধরা যাক, তুমি জানতে চাও, ১৯৪৭ সালের ১৫ই আগস্ট কি বার ছিল ? এখন নিয়ম হচ্ছে ঐ সালের শেষ দুই অংকের সংখ্যাটি (অর্থাৎ একক ও দশক স্থানের অংক দুটি দিয়ে যে সংখ্যা হয় সেটি) নিতে হবে এবং এক্ষেত্রে তার মান হলো ৪৭। এরপর এই ৪৭কে ৪ দিয়ে ভাগ করে যে ভাগফল থাকে, সেটি ৪৭-এর সঙ্গে যোগ করা হলো। এই ভাগের সময় যা ভাগশেষ থাকবে তা উপেক্ষা করতে

হবে। এক্ষেত্রে ভাগফল হবে ১১। এখন ৪৭ এবং ১১-এর যোগফল পাওয়া গেল ৫৮।

এর পরের ধাপে নির্দিষ্ট তারিখটা ঐ যোগফলের সঙ্গে যোগ করতে হবে অর্থাৎ এক্ষেত্রে দাঁড়াচ্ছে ৫৮ + ১৫ = ৭৩।

এর পরের ধাপে আরেকটা কাজ তোমাকে করতে হবে এবং তা হল প্রত্যেক মাসের জন্য যে এক একটা সংখ্যা নির্দিষ্ট করা আছে সেটিকে মনে রাখা এবং তা আগের যোগফলের সঙ্গে যোগ করা। এখন কোন্ মাসের কি সংখ্যা আছে অর্থাৎ যাকে মাস ধ্রুবক বলা যেতে পারে সেটি জানিয়ে দিই :

মাস	মাস ধ্রুবক
জানুয়ারী	১
ফেব্রুয়ারী	৪
মার্চ	৪
এপ্রিল	০
মে	২
জুন	৫
জুলাই	০
আগস্ট	৩
সেপ্টেম্বর	৬
অক্টোবর	১
নভেম্বর	৪
ডিসেম্বর	৬

তবে লিপ্ ইয়ার হলে জানুয়ারী আর ফেব্রুয়ারী মাস দুটির মাস ধ্রুবক মান সাধারণ বছরের মানের চেয়ে ১ কম হবে। অর্থাৎ লিপ্ ইয়ারের জানুয়ারীর মাস ধ্রুবক হচ্ছে ০ এবং ফেব্রুয়ারীর হচ্ছে ৩।

এখন আগে তারিখ অবধি যোগ করে ৭৩ পেয়েছ, এবার তার সঙ্গে মাস ধ্রুবক ৩ (আগস্ট মাসের জন্য ৩) যোগ কর এবং তাতে পাওয়া গেল ৭৩+৩=৭৬। এই ৬৭কে ৭ দিয়ে ভাগ করে কি ভাগশেষ থাকে তা তোমায় দেখতে হবে। কোন ভাগশেষ না থাকলে বুঝবে ঐ দিনটি ছিল শনিবার। যদি ভাগশেষ ১ হয় তবে রোববার, ২ হলে সোমবার, ৩ হলে মঙ্গলবার, ৪ হলে বুধবার, ৫ হলে বৃহস্পতিবার, ৬ হলে শুক্রবার—এইভাবে বোঝাবে। এখন ৭৬কে ৭ দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ পাওয়া যাবে ৬ এবং নিয়ম অনুযায়ী সেদিন হবে শুক্রবার। সুতরাং ১৯৪৭ সালের ১৫ই আগস্ট অর্থাৎ ভারতের স্বাধীনতার দিনটি ছিল শুক্রবার। এইভাবে যে কোন তারিখের বারটি তুমি খুঁজে বার করে নিতে পার।

তোমাকে ১৯০০ থেকে ১৯৯৯ সাল অবধি নিয়ম বলে দিয়েছি, এখন তুমি যদি ১৮০০ থেকে ১৮৯৯ সাল অবধি কোন তারিখের কি বার জানতে চাও তবে ঐ একই নিয়ম মেনে মোট যোগফলের সঙ্গে ২ যোগ দিয়ে তাকে ৭ দিয়ে ভাগ করে নেবে, আর ভাগশেষ দেখে বারটি খুঁজে নিতে পারবে।

ধরা যাক, নেতাজীর জন্মদিন ২৩শে জানুয়ারী, ১৮৯৭ সাল কি বার জানতে চাও।

এখন আগের নিয়ম অনুযায়ী তুমি ১৮৯৭ সাল থেকে ৯৭ সংখ্যাটা নাও। এরপর ৯৭কে ৪ দিয়ে ভাগ করে ভাগফলটা এর সঙ্গে যোগ কর। ভাগফল হলো ২৪। অতএব তুমি পেলে ৯৭+২৪=১২১ সংখ্যাটি। এর সঙ্গে তারিখের সংখ্যাটি অর্থাৎ ২৩ যোগ করে পাওয়া গেল ১৪৪। এর সঙ্গে মাস ধ্রুবক ১ যোগ করে পাওয়া গেল ১৪৫। যেহেতু এই সালটা ১৮০০ থেকে ১৮৯৯-এর মধ্যে পড়েছে, সুতরাং নিয়ম অনুযায়ী আরও ২ যোগ করা হলো এবং তাতে পাওয়া গেল

১৪৭। এই সংখ্যাটিকে ৭ দিয়ে ভাগ করলে কোন ভাগশেষ রইল না। অর্থাৎ তুমি বুঝতে পারলে ঐ দিনটা ছিল শনিবার।

এখন তুমি হয়ত বলবে আর কয়েক বছর পরেই ২০০০ সাল শুরু হতে যাচ্ছে, তখনকার কোন্ তারিখ কি ভাবে বার করব? তোমার কৌতূহল মেটাবার জন্য ২০০০ থেকে ২০৯৯ সাল অবধি নিয়মটা জানিয়ে দিচ্ছি। এর পরের ব্যাপারটা আপাতত না জানলেও চলবে। এক্ষেত্রে নিয়ম হলো আগের মতো মোট যোগফল বার করে যোগফলে ৬ যোগ করতে হবে এবং তাকে ৭ দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ দেখে বার নির্ণয় করতে হবে।

যোগফল যখন সবচেয়ে ছোট ঃ

এক পত্রিকার সম্পাদক একবার ৫০ টাকা পুরস্কার ঘোষণা করলেন তাঁর পত্রিকার পাঠকদের জন্য। ঘোষণায় বলা ছিল ১৪ বছরের মধ্যে যে কোন পাঠক এতে অংশ গ্রহণ করতে পারবে। যে পাঠক খুব মজার অথচ সহজ একটি অংকের খেলা দেখাতে পারবে তাকেই ঐ টাকা দেওয়া হবে।

ঘোষণা অনুযায়ী অনেক পাঠকই এতে অংশগ্রহণ করেছিল, তবে এতে প্রথম হল জয়তী ব্যানার্জী নামে টালিগঞ্জের একটি মেয়ে। সে যে খেলাটা পাঠিয়েছিল তার নাম ছিল 'যোগফল যখন সবচেয়ে ছোট'।

এবার জয়তীর পাঠানো খেলাটা তোমাদের বলি। যে যে দুটো

সংখ্যার গুণফল সমান, সেই সেই সংখ্যা সে সাজিয়ে রেখেছিল আর দেখিয়েছিল, যেখানে দুটো সংখ্যার মান সমান সেখানেই যোগফল সবচেয়ে ছোট। জয়তী যে দুটো উদাহরণ পাঠিয়েছিল, সে দুটি হল :

(১) ৬৪ × ১ = ৬৪

৩২ × ২ = ৬৪

১৬ × ৪ = ৬৪

৮ × ৮ = ৬৪

প্রত্যেক ক্ষেত্রেই দুটো সংখ্যার গুণফল হচ্ছে ৬৪। আর এর মধ্যে শেষের ক্ষেত্রে সংখ্যা দুটো সমান অর্থাৎ ৮ এবং ৮। এবং এ দুটির যোগফল = ১৬।

প্রথমটির ক্ষেত্রে যোগফল = ৬৪ + ১ = ৬৫

দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে যোগফল = ৩২ + ২ = ৩৪

তৃতীয়টির ক্ষেত্রে যোগফল = ১৬ + ৪ = ২০

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, দুটো সংখ্যার মান যখন সমান তখনই যোগফল সবচেয়ে কম এবং এক্ষেত্রে তার মান হচ্ছে ১৬।

(২) ৩৬ × ১ = ৩৬

১৮ × ২ = ৩৬

৯ × ৪ = ৩৬

১২ × ৩ = ৩৬

৬ × ৬ = ৩৬

প্রত্যেক ক্ষেত্রেই দুটো সংখ্যার গুণফল হচ্ছে ৩৬। আর এর মধ্যে শেষের ক্ষেত্রে সংখ্যা দুটো সমান অর্থাৎ ৬ এবং ৬ ও ৬ এ দুটি সংখ্যার যোগফল=১২।

প্রথমটির ক্ষেত্রে যোগফল=৩৬+১=৩৭

দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে যোগফল=১৮+২=২০

তৃতীয়টির ক্ষেত্রে যোগফল= ৯+৪=১৩

চতুর্থটির ক্ষেত্রে যোগফল=১২+৩=১৫

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, দুটো সংখ্যার মান যখন সমান হয়, তখনই যোগফল সবচেয়ে কম হয় এবং এক্ষেত্রে যোগফল হচ্ছে ১২।

অংকের এই খেলাটা নিশ্চয়ই তোমাদের ভাল লেগেছে। আর এই খেলার জন্য জয়তী ৫০ টাকা পুরস্কার লাভ করল। সে ওই ৫০ টাকাকে সমান দু'ভাগে ভাগ করে নিল দু'বোনের মধ্যে। বড় বোন স্বাতীকে দিল ২৫ টাকা আর নিজে রাখল ২৫ টাকা।

দুই বন্ধু ও তুঁতের দ্রবণ

দুই বন্ধুর একজনের কাছে শতকরা ৩০ ভাগের একটি তুঁতের দ্রবণ আছে এবং অপর জনের কাছে শতকরা ৩ ভাগের আর একটি ঐ দ্রবণ আছে। এখন বন্ধু দু'জন শতকরা ১২ ভাগের একটি দ্রবণ তৈরী করতে চাইল। বন্ধু দু'জন অনেক চেষ্টা করেও ঠিক করতে পারল না কি অনুপাতে দ্রবণ দুটি মিশালে তারা শতকরা ১২ ভাগের একটি দ্রবণ তৈরী করতে পারবে। সুতরাং তারা তখন অংকের

শিক্ষকের কাছে এসে তাদের সমস্যার কথা বলল। অংকের শিক্ষক এক টুকরো কাগজের উপর ছোট্ট একটা হিসেব কষে তাদের দেখিয়ে দিলেন যে, কাজটা মোটেই শক্ত নয়।

তিনি যেভাবে তাদের সেটা বুঝিয়ে দিলেন তা নিচে দেওয়া হলো—

শতকরা ১২ ভাগ দ্রবণ তৈরীর জন্য তিনি ধরলেন যে, ক গ্রাম শতকরা ৩ ভাগের দ্রবণ এবং খ গ্রাম শতকরা ৩০ ভাগের দ্রবণ মেশান হলো। এতে প্রথম ক্ষেত্রে পাওয়া গেল ০'০৩ ক গ্রাম তুঁতের দ্রবণ আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে পাওয়া গেল ০'৩ খ গ্রাম তুঁতের দ্রবণ।

এতে মোট তুঁতের ওজন হলো=(০'৯৩ ক=০'৩খ) গ্রাম। আর এতে তৈরী (ক+খ) গ্রাম তুঁতের দ্রবণে ০'১২ (ক+খ) গ্রাম বিশুদ্ধ তুঁতে থাকে।

আর শর্ত অনুযায়ী তাই পাওয়া যাবে—

০'০৩ ক × ০'৩খ = ০'১২ (ক+খ)

বা, ০'০৩ ক + ০'৩খ = ০'১২ ক + ০'১২খ

বা, ০'৩ খ − ০'১২ খ = ০'১২ ক − ০'০৩ ক

বা, ০'১৮ খ = ০'০৯ ক

বা, $\text{খ}=\frac{\text{০'০৯}}{\text{০'১৮}}\text{ক}=\frac{\text{ক}}{\text{২}}$

সুতরাং ক=২খ।

অতএব দেখা যাচ্ছে যে, শতকরা ৩০ ভাগের দ্রবণ যতটা নেওয়া হবে, শতকরা তিনভাগের দ্রবণটি তার দ্বিগুণ পরিমাণে নিতে হবে।

অংকটি বন্ধু দু'জন সহজেই বুঝতে পারল আর সেইভাবে নির্দিষ্ট অনুপাতে দ্রবণ দুটি মিশিয়ে তারা সমস্যা মিটিয়ে নিল।

এক মুহূর্তের যোগ

আমি তোমাদের এমন একটি যোগ করতে দেব যা করতে তোমাদের কিছু সময় লাগবে। যোগটা যদি বড় আকারে দিই তবে সময় বেশী লাগবে আর ছোট আকারে দিলে তা তাড়াতাড়ি হয়ে যাবে। কিন্তু আমি তোমাদের এমন উপায় শিখিয়ে দিতে পারি যাতে এই ধরনের যোগ, যত বড়ই হোক না কেন, সেটা করতে সময় লাগবে মাত্র ২ থেকে ৩ সেকেণ্ড।

একটা যোগ নিচে লেখা হলো। এই যোগ করার আগে প্রতিক্ষেত্রে বিয়োগ করে নিতে হবে এবং বিয়োগফলগুলির যোগ করতে হবে। এইভাবে করতে সময় তো কিছু লাগবেই। একটা উদাহরণ দিলে ব্যাপারটা সহজ হবে। ধর তোমাকে একটা সংখ্যা লিখতে বলা হলো। সংখ্যাটা থেকে তোমার ইচ্ছেমত আরেকটা সংখ্যা বিয়োগ করতে বলা হলো। এর পরের বার আরেকটা সংখ্যা ধরো এবং এর থেকে প্রথমে যে সংখ্যাটা ধরেছিলে তা বিয়োগ করো।

এইভাবে প্রত্যেকবারে যে সংখ্যাই ধরো না কেন, তার আগের বারের সংখ্যাটা বিয়োগ করতে হবে। এমনি করে তুমি বিয়োগের এক সারি অংক তৈরী করতে পার। শুধু শর্ত হলো, যা থেকে বিয়োগ করা হচ্ছে, সেটাই পরের বিয়োগের অংকে বিযোজ্য হিসেবে লিখতে হবে।

যেমন,

৯— ৪= ৫
১৬— ৯= ৭
২৫—১৬= ৯
৩২—২৫= ৭
৩৯—৩২= ৭
৪৯—৩৯=১০
৬৯—৪৯=২০
৭৮—৬৯=৯
৮৮—৭৮=১০
৯৭—৮৮= ৯
১১০—৯৭=১৩
১২২—১১০=১২
১৩০—১২২= ৮
১৪০—১৩০=১০

যোগফল=১৩৬

এ-এক বেশ বিয়োগের যোগ, তাই না? তোমরা ইচ্ছে করলে আরো বড় বিয়োগের যোগ লিখতে পারো। এখন প্রতিটি ক্ষেত্রে বিয়োগ করে যে বিয়োগফল পাওয়া গেল, সেগুলি যোগ করে যোগফল ১৩৬ পাওয়া গেল এবং এই যোগ করতে তোমাদের ২ থেকে ৩ মিনিট লেগে যেতে পারে। এখন তোমাদের যে নিয়মটা শিখিয়ে দিচ্ছি তা মেনে চললে দেখবে যে যোগটা করতে ২ থেকে ৩ সেকেণ্ডের বেশী সময় লাগবে না। এর জন্য তোমাকে শেষ বিয়োগের অংকের বাঁদিকের সংখ্যা থেকে প্রথম বিয়োগের অংকের ডানদিকের সংখ্যাটি বিয়োগ করলেই হবে আর তাতেই উত্তর পেয়ে যাবে। এক্ষেত্রে শেষ

অংকের বাঁদিকের সংখ্যা = ১৪০ এবং প্রথম অংকের ডানদিকের সংখ্যা = ৪ এবং এই দুটি সংখ্যার বিয়োগফল = ১৩৬, (১৪০—৪ = ১৩৬), আর একাজটি করতে নিশ্চয়ই ২ থেকে ৩ সেকেণ্ডের বেশী সময় লাগবে না। এখন এর কারণটা বলে দিচ্ছি। লক্ষ্য করলে দেখতে পাবে যে, ঐ দুটো সংখ্যা ছাড়া বাকী সংখ্যাগুলো যোগের সময় কাটাকুটি হয়ে যাচ্ছে আর তাতে যোগের ব্যাপারটা সহজ হয়ে যাচ্ছে।

কার হাতের লেখা ভাল?

প্রদীপ আর শ্যামল দুই বন্ধু ক্লাশ নাইনে পড়ে। তবে তারা দুটি বিভিন্ন স্কুলের ছাত্র। দু'জনেই দুই স্কুলের সেরা ছাত্র। তারা দু'জন আবার একই শিক্ষকের কাছে প্রাইভেট পড়ে। শিক্ষক মশাই দেখলেন যে, দু'জনেই বেশ মেধাবী তবে একজনের হাতের লেখা অন্যের চেয়ে ভাল।

শিক্ষক মশাই একদিন দু'জনকে ইংরাজীর একটা পরীক্ষা করে দু'জনকে যে নম্বর দিলেন তাতে দেখা গেল দু'জনেই সমান নম্বর পেয়েছে। তাই তিনি হাতের লেখা বিচার করে একজনকে বেশী নম্বর দিতে চাইলেন।

তিনি একটা কাগজে শ্যামলকে একটা নম্বর দিলেন $\sqrt{২}$ এবং প্রদীপকে আরেকটা কাগজে নম্বর দিলেন $\sqrt[৫]{৫}$। এর মধ্যে যে সংখ্যাটি বড় তার লেখা ভাল। বলতো কার হাতের লেখা ভাল?

সমাধান—এখন দেখা যাক $\sqrt{২}$ এবং $\sqrt[৫]{৫}$-এর মধ্যে কোন সংখ্যাটি বড়। বড় সংখ্যাটি যে পেয়েছে তারই হাতের লেখা ভাল।

এবার সংখ্যা দুটির সূচক বা পাওয়ারকে ১০ গুণ করে লিখলে পাওয়া যায়—

$(\sqrt{২})^{১০}=২^{\frac{১}{২}\times ১০}=২^{৫}=৩২$

এবং $(\sqrt[৫]{৫})^{১০}=৫^{\frac{১}{৫}\times ১০}=৫^{২}=২৫$

$\therefore$ $\sqrt{২}$ সংখ্যাটি $\sqrt[৫]{৫}$ সংখ্যার চেয়ে বড়।

অর্থাৎ শ্যামলের হাতের লেখা প্রদীপের চেয়ে ভাল।

কোন সংখ্যাটি সদস্য সংখ্যা হতে পারে না ?

নেতাজী সুভাষ সুইমিং ক্লাবে কিছু সংখ্যক ছেলে ও মেয়ে আছে। ক্লাবে ছেলের সংখ্যা মেয়ের সংখ্যার ৫ গুণ। নিচে ক্লাবের বিভিন্ন সময়ে মোট সদস্য সংখ্যা দেওয়া হলো। কোন্ সংখ্যাটি শর্ত অনুযায়ী ক্লাবের সদস্য সংখ্যা হতে পারে না ?

(ক) ১৮ (খ) ৩০ (গ) ৩৫ (ঘ) ৪২

উত্তর—৩৫ সংখ্যাটি কখনই সদস্য সংখ্যা হতে পারে না। কারণ, মেয়ের সংখ্যা যদি ১ ধরা হয়, ছেলের সংখ্যা ৫ হতে হবে এবং কম পক্ষে ছেলেমেয়ের সংখ্যা ৫ + ১ = ৬ হতে হবে। সুতরাং এই শর্তানুযায়ী ক্লাবের সদস্য সংখ্যা সবসময়ই ৬-এর গুণিতক হবে এবং ৩৫ সংখ্যাটি ৬-এর গুণিতক নয় বলে এই সংখ্যাটি ক্লাবের সদস্য সংখ্যা হতে পারে না।

ঘরে কতজন লোক ছিল ?

এক যাদুকর কিছু লোককে তাঁর মজার খেলা দেখাচ্ছিলেন। হঠাৎ যাদুকর বললেন, 'এই ঘরে কতলোক আছে তা জানা যাবে, আমার এই ভগ্নাংশের উত্তর থেকে'। এই বলে তিনি একটি কালো বোর্ডে পরের পাতার ভগ্নাংশটি লিখে ফেললেন—

$$১৪ \times ৭ \; \cfrac{\frac{৫}{৭} - \frac{১}{১১}}{৫ - \cfrac{১}{২ - \cfrac{১}{৩ - \cfrac{২}{৩}}}}$$

এবার বলো-তো কত লোক ছিল সেই ঘরে ?

উত্তর ঃ

$$\text{উপরের ভগ্নাংশ} = ১৪ \times \left(৭ + \cfrac{\frac{৫}{৭} - \frac{১}{১১}}{৫ - \cfrac{১}{২ - \cfrac{১}{\frac{৭}{৩}}}}\right)$$

$$= ১৪ \times \left(৭ + \cfrac{\frac{৫}{৭} - \frac{১}{১১}}{৫ - \cfrac{১}{২ - \frac{৩}{৭}}}\right) \qquad = ১৪ \times \left(৭ + \cfrac{\frac{৫}{৭} - \frac{১}{১১}}{৫ - \cfrac{১}{\frac{১১}{৭}}}\right)$$

$$= ১৪ \times \left(৭ + \cfrac{\frac{৫৫ - ৭}{৭৭}}{৫ - \frac{৭}{১১}}\right) \qquad = ১৪ \times \left(৭ + \cfrac{\frac{৪৮}{৭৭}}{\frac{৪৮}{১১}}\right)$$

$$= ১৪ \times \left(৭ + \frac{৪৮ \times ১১}{৭৭ \times ৪৮}\right) \qquad = ১৪ \times \left(৭ + \frac{১}{৭}\right)$$

$$= ১৪ \times \frac{৫০}{৭} = ২ \times ৫০ = ১০০$$

ভগ্নাংশটি সরল করলে পাওয়া যায় ১০০, অতএব ঘরে ১০০ জন লোক ছিল।

ক্লাসে উঠেছে কোন্ স্থান পেয়ে ?

ব্রততী মেয়েটি বুদ্ধিমতী এবং পড়াশুনায় ভাল। সে স্কুলের পরীক্ষায় ভাল ফল করে উঁচু ক্লাশে উঠেছে। নিচের রাশিটিকে সরল করলেই জানা যাবে সে ক্লাশে কোন্ স্থান পেয়েছে।

$$\frac{৮}{৫}\div\left[১+১\div\left\{১+১\div\left(১+\frac{১}{১+১}\right)\right\}\right]$$

এই রাশিটি $=\frac{৮}{৫}\div\left[১+১\div\left\{১+১\div\left(১+\frac{১}{২}\right)\right\}\right]$

$$=\frac{৮}{৫}\div\left[১+১\div\left\{১+১\div\frac{৩}{২}\right\}\right]$$

$$=\frac{৮}{৫}\div\left[১+১\div\left\{১+\frac{২}{৩}\right\}\right]$$

$$=\frac{৮}{৫}\div\left[১+১\div\frac{৫}{৩}\right]$$

$$=\frac{৮}{৫}\div\left[১+\frac{৩}{৫}\right]=\frac{৮}{৫}\div\frac{৮}{৫}=১$$

অতএব ব্রততী ক্লাশে প্রথম হয়েছিল।

সংখ্যার পূর্বপুরুষ সুখী ছিল

আমাদের পূর্বপুরুষেরা একান্নবর্তী পরিবারে থাকতেন। পরিবারের একজনের সঙ্গে অন্যজনের মিল ছিল খুব বেশী। কিন্তু আজকের দিনে বিভিন্ন কারণে ছোট ছোট পরিবারের সৃষ্টি হয়েছে, আর সেই সঙ্গে

মনের মিলও কমে গেছে। শুধু মানুষের ক্ষেত্রে নয়, সংখ্যার ক্ষেত্রেও তার প্রমাণ পাওয়া গেছে। তোমরা হয়ত আমার কথা বিশ্বাস করতে পারছ না, ভাবছ এ আবার কি কথা! একি কখনও সম্ভব? তোমরা যাতে বিশ্বাস করতে পার তার জন্য তিন বন্ধু সংখ্যার গল্প বলছি তোমাদের কাছে। গল্পটি হচ্ছে—

৯৪০৯, ৯৬০৪ এবং ৯৮০১ এই তিনটি সংখ্যা নিজেদের মধ্যে কথা বলছিল। ৯৪০৯ সংখ্যাটি ৯৬০৪ সংখ্যাকে বলল, দেখ তোমার সঙ্গে আমার প্রভেদ এখন প্রায় ২০০-এর মত আর ৯৮০১ সংখ্যাকে বলল, তোমার সঙ্গে আমার প্রভেদ প্রায় ৪০০-এর মত দাঁড়িয়েছে। অর্থাৎ আমরা তিনজন পরস্পর প্রায় ২০০-এর মত দূরে সরে গেছি। কিন্তু গতজন্মে আমার সঙ্গে তোমাদের প্রভেদ ছিল মাত্র ১ আর ২। ৯৬০৪ আর ৯৮০১ এরা দু'জন ৯৪০৯ সংখ্যার হেঁয়ালীটা বুঝতে পারল না। তারা দু'জন বলে উঠল, কি রকম হল ব্যাপারটা, ঠিক বুঝতে পারলাম না।

৯৪০৯ তখন হেসে বলল, আমার আগের পুরুষ ছিল ৯৭, আর তোমাদের আগের পুরুষের একজন ছিলো ৯৮ আর একজন ছিলো ৯৯। ৯৪০৯ সংখ্যার কথা ৯৬০৪ এবং ৯৮০১ সংখ্যা দুটো এবারও ঠিক বুঝতে পারল না। তারা খুব রেগে গেল ৯৪০৯ সংখ্যার ওপর। তাদের রাগ কমাবার জন্য ৯৪০৯ বলল, আমাদের আগের পুরুষদের রূপটা তোমাদের দেখাচ্ছি। এই বলে সে পূর্ব পুরুষদের রূপটা নিচের লেখার মত দেখিয়েদিল।

$$৯৪০৯ = ৯৭^২$$
$$৯৬০৪ = ৯৮^২$$
$$৯৮০১ = ৯৯^২$$

৯৪০৯ বলিল, দেখ আমাদের আগের পুরুষ ছিল ৯৭, ৯৮ এবং ৯৯ আর তাদের মধ্যে পার্থক্য ছিল মাত্র ১।

৯৪০৯-এর কথা শুনে বাকী দু'জন এবার খুশী হল। ৯৪০৯ আবার বলল, এখানেই কিন্তু সম্পর্কের শেষ নয়, আরও অনেক মিল ছিল আমাদের। আমাদের প্রত্যেকের একক ও শতকের অংকটা নিয়ে নিজেদের দাঁড় করালেও যে যে সংখ্যায় আমরা পরিণত হব, সেখানেও পূর্বপুরুষের এই মিল আছে। একক আর শতকের অংক দুটি নিলে আমি তখন ছিলাম ৪৯, আর ৯৬০৪ ছিলে ৬৪ আর ৯৮০১ ছিলে ৮১। এখন তিন সংখ্যার পূর্বপুরুষ হল যথাক্রমে ৭, ৮ এবং ৯।

কারণ—

$$৪৯ = ৭^২$$

$$৬৪ = ৮^২$$

$$৮১ = ৯^২$$

কিছুক্ষণ থেমে ৯৪০৯ আবার বলল, ৯৭, ৯৮, ৯৯ এবং ৭, ৮, ৯ এরা শুধু পরপর সংখ্যা নয়, ৯৭ থেকে ৭, ৯৮ থেকে ৮ এবং ৯৯ থেকে ৯-এর পার্থক্যও ছিল একই রকম অর্থাৎ প্রতিক্ষেত্রে ৯০ অর্থাৎ সে সময়ে যে সব পার্থক্য ছিল সেখানেও একটা ছন্দ ছিল।

এই হল তিন সংখ্যার গল্প। এই গল্প থেকে তোমরা বুঝতে পারছ যে, সংখ্যার পূর্বপুরুষরাও খুব সুখী ছিল, অর্থাৎ তাদের মধ্যে পারস্পারিক বন্ধন ছিল দৃঢ়।

কয়েকটি সংখ্যা এবং তাদের বন্ধুত্ব

পাঁচটা পরপর সংখ্যা নিজেদের মধ্যে বন্ধুত্ব করেছিল। সংখ্যা-

গুলো হলো ১০, ১১, ১২, ১৩ এবং ১৪। এখন এদের মধ্যে দেখা গেল যে, প্রথম তিনজন একসঙ্গে থাকতে চায় আর শেষের দু'জন একসঙ্গে থাকতে চায়। প্রথম তিনজনের (অর্থাৎ ১০, ১১ এবং ১২) মধ্যে ভাব একটু বেশী। আবার বাকী দু'জনের (অর্থাৎ ১৩ এবং ১৪) মধ্যে মিল বেশী। ১৩ এবং ১৪ এরা দু'জন বড়, তারা তাদের ছোটদের এড়িয়ে চলাতে ১০, ১১ এবং ১২ এই তিন বন্ধু ব্যাপারটা ভাল চোখে নিল না। তারা তিনজনে মিলে একদিন ১৪ সংখ্যার কাছে এর প্রতিবাদ করল। ১৪ সংখ্যাটি ছোট তিনজনকে বুঝিয়ে দিল যে, তাদের প্রতি ১৩ এবং ১৪ এই দু'জনের কোন অবজ্ঞা বা অবহেলা নেই। বরং ছোট বলে একটু স্নেহই আছে।

কয়েকদিন ছোট তিনজন চুপচাপ রইল; কিন্তু আবার একদিন তিনজনে এর প্রতিবাদে বলল যে, আমরা তিনজন একত্র হলে তোমাদের দু'জনের চেয়ে বেশী শক্তি ধরি। কারণ আমাদের তিন-জনের শক্তি হচ্ছে ৩৩ (১০+১১+১২=৩৩)। আর তোমাদের দু'জনের শক্তি হচ্ছে ২৭ (১৩+২৪=২৭)। ছোট তিনজনের কথা শুনে ১৩ এবং ১৪ দু'জনেই এবার একসঙ্গে গলা মেলাল, 'আমরা আপাতভাবে দু'জন তোমাদের তিনজনের চেয়ে ছোট হতে পারি, কিন্তু একটা কাজ করলে আমাদের দু'জনের শক্তির যোগফল তোমাদের তিনজনের যোগফলের সমান। তাই আমরা দু'জন একদিকে থাকলে ভাল হয়, আর অন্যদিকে তোমরা তিনজন থাকলে ভাল হয়। প্রথম তিনজন ব্যাপারটা ঠিক বুঝতে না পেরে বলল, কাজটা কি তা আমরা জানতে চাই।

এই প্রশ্নের উত্তরে তারা দু'জন বলল, আমরা প্রত্যেকেই যদি যে যার বর্গরূপ ধরি এবং সেই অবস্থায় আমরা দু'জন যদি একসঙ্গে থাকি তবে ঐ অবস্থায় তোমাদের তিনজনের সমান হব। আর শুধু কি

তাই, এই অবস্থায় আমরা দু'জন আর তোমরা তিনজন একই মান ৩৬৫ দিতে পারি অর্থাৎ বছরের ৩৬৫ দিনই আমাদের বন্ধুত্ব অটুট থাকবে। এই বলে তারা দেখিয়ে দিল কিভাবে সেটা হচ্ছে।

$১০^২ + ১১^২ + ১২^২ = ১৩^২ + ১৪^২$

বা, $১০০ + ১২১ + ১৪৪ = ১৬৯ + ১৯৬ = ৩৬৫$

১৩ আর ১৪ এই দুই বন্ধুর কথা শুনে বাকী তিনজনের আর কোন রাগই রইল না, বরং বুঝল তাদের মধ্যে মিল রাখতে গেলে ঐভাবেই তাদের থাকতে হবে।

(খ) তিনটি সংখ্যা ও তাদের বন্ধুত্ব :—

১০, ১১, ১২, ১৩ এবং ১৪ এই পাঁচটি সংখ্যার বন্ধুত্ব আমরা লক্ষ্য করলাম। এবার অপেক্ষাকৃত ছোট এবং পরপর তিনটে সংখ্যা ৩, ৪ এবং ৫ এর মধ্যে একই ধরনের বন্ধুত্বের খোঁজ আমরা পেতে পারি।

৩ এবং ৪ এই দুইজনের মধ্যে মিলটা বেশি এবং তাদের মিলিত শক্তি $= ৩ + ৪ = ৭$ এবং তাদের দুজনের মান তৃতীয় সংখ্যা ৫ এর চেয়ে বেশি। কিন্তু ৫ একদিন ৩ এবং ৪ কে বুঝিয়ে দিল, "যদি আমরা প্রত্যেকে যে যার বর্গরূপ ধরি তবে আমি একদিক থেকে যে ক্ষমতা রাখি, তোমরা দু'জনে অন্যদিক থেকে সেই ক্ষমতার অধিকারী হও।

অর্থাৎ অংকের কথায়—

$৫^২ = ৩^২ + ৪^২ = ৯ + ১৬ = ২৫$

৫ এর বক্তব্যকে ৩ এবং ৪ মেনে নিল এবং তিনজনেই বন্ধুত্বের বন্ধনে আটকা পড়ল।

(গ) ৭টি সংখ্যা ও তাদের বন্ধুত্ব :—

(ক) ও (খ) এর মত বর্গের নিয়ম মেনে এখানেও ৭টি সংখ্যার মধ্যে বন্ধুত্ব দেখান হয়েছে। সংখ্যা সাতটি হলো—২১, ২২, ২৩, ২৪, ২৫, ২৬ এবং ২৭। সংখ্যাগুলির মধ্যে সম্পর্কটি হল—

$$২১^২+২২^২+২৩^২+২৪^২$$
$$=২৫^২+২৬^২+২৭^২$$

ভাই আর বোনের সংখ্যাটি বলে দিতে চাই

একজন লোককে বলা হলো তারা যত ভাই সেই সংখ্যাটিকে ২ দিয়ে গুণ করতে। তারপরে গুণফলে ১ যোগ করে যোগফলকে ৫ দিয়ে গুণ করতে বলা হলো। এই গুণফলের সঙ্গে বোনের সংখ্যাটি যোগ করে যে যোগফলটি পাওয়া গেল, সেই সংখ্যাটি বলতে বলা হলো। যোগফলটি পেয়ে আমরা বলে দিতে পারবো তারা মোট কত ভাই আর কত বোন।

উদাহরণ : ধরা যাক লোকটির নাম সুভাষ দে। সুভাষবাবুরা ৭ ভাই ৩ বোন। এবার ভাইয়ের সংখ্যাকে ২ দিয়ে গুণ করলে পাওয়া গেল ১৪। এর সঙ্গে ১ যোগ করে হলো ১৫। এই ১৫-এর সঙ্গে ৫ গুণ করে পাওয়া গেল ৭৫। এই ৭৫-এর সঙ্গে বোনের সংখ্যা ৩ যোগ করে যোগফল হলো ৭৮। এই ৭৮ যোগফলটি যখন আমরা জানতে পারবো, তখন বলতে পারবো, সুভাষবাবুকে নিয়ে মোট কত জন ভাই আর তার কত বোন। নিয়মটা হলো, ৭৮ থেকে ৫ বাদ দিতে হবে। তাতে পাওয়া যাবে ৭৩। এই ৭৩-এর এককের ঘরের সংখ্যাটি বোনের সংখ্যা এবং যে অংকটি অবশিষ্ট থাকবে সেটি হবে ভাইয়ের সংখ্যা।

এমন একটা ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বার করা যাবে কি যাতে সংখ্যাটিকে

ক্রমাগত ভাগ করা হবে	আর প্রত্যেক ক্ষেত্রে ভাগশেষ থাকবে
১০ দিয়ে	৯
৯ দিয়ে	৮
৮ দিয়ে	৭
৭ দিয়ে	৬
৬ দিয়ে	৫
৫ দিয়ে	৪
৪ দিয়ে	৩
৩ দিয়ে	২
২ দিয়ে	১

হ্যাঁ এমন অনেক সংখ্যা আছে এবং ক্ষুদ্রতমটি হলো ২৫১৯। কি করতে হবে — ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯ এবং ১০ এর ল. সা. গু. করে, তার থেকে ১ বাদ দিলেই পাওয়া যাবে ২৫১৯।

দুটি তারায় মিল

বিশ্ব-ব্রহ্মাণ্ডে আছে অগণিত তারা। পৃথিবী থেকে একটি তারার দূরত্ব ৩৫২৯৪১১৭৬৪৭০৫৮৮২ কিলোমিটার। এবং আরেকটি তারার দূরত্ব ৫২৯৪১১৭৬৪৭০৫৮৮২৩ কিলোমিটার।

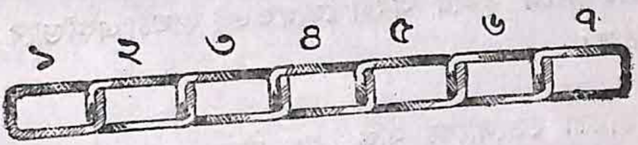
অঙ্কের নিয়মে এবং দূরত্বের দিক দিয়ে এদের মধ্যে বেশ মিল

আছে। প্রথম সংখ্যার দূরত্বকে ৩ দিয়ে গুণ করে, গুণফলকে ২ দিয়ে ভাগ করলে দ্বিতীয় সংখ্যার দূরত্বটি পাওয়া যাবে।

সোনার চেন ভেঙ্গে চিকিৎসা

এক ভদ্রলোক খুব অসুখে ভুগছিলেন। কিন্তু সংসার খরচা করার পর তার হাতে কিছুই থাকত না যা দিয়ে তিনি চিকিৎসা চালাতে পারেন। তাই তিনি তাঁর একটা সোনার চেন একজন স্যাকরার কাছে ভাঙ্গাতে চাইলেন। স্যাকরাটি তাঁর কাছে প্রস্তাব দিলেন যে প্রতি মাসে চেনের একটা করে আংটা দিলে তিনি তাঁকে তখন ঐ আংটা বাবদ ১০০ টাকা দিতে পারেন। ভদ্রলোক স্যাকরার কথায় রাজী হলেন।

ভদ্রলোক সোনার চেনটাকে কিভাবে কত কম টুকরো করে কাটিয়ে স্যাকরাকে প্রতিবার ১টা করে আংটা দিতে পারেন এবং বিনিময়ে প্রতিবার ১০০ টাকা পেতে পারেন?



ভদ্রলোক খুব বুদ্ধিমান ছিলেন। তিনি চাইলেন না বেশি আংটা কাটাতে। তাই তিনি একটি মাত্র আংটা কাটিয়েই কাজটা হাসিল করলেন। তিনি ৫ম আংটা কাটালেন।

প্রথম মাসে স্যাকরাকে তিনি ৫ম আংটাটা দিলেন এবং বিনিময়ে ১০০ টাকা পেলেন। দ্বিতীয় মাসে ৬ এবং ৭ নং আংটা দুটো একত্রে দিয়ে ৫ম আংটা ফিরিয়ে নিলেন এবং তাতে তার একটি আংটাই

দেওয়া হলো। এবারও তিনি ১০০ টাকা পেলেন।

তৃতীয় মাসে তিনি আবার ৫নং আংটাটা দিলেন এবং ১০০ টাকা আদায় করলেন। চতুর্থ মাসে তিনি ১, ২, ৩ এবং ৪ নং এই চারটে আংটা একত্রে দিলেন আর ৫নং, ৬ এবং ৭নং আংটাগুলো ফেরত নিলেন। এবারও একটি আংটাই দেওয়া হলো। তাই এবারও তিনি ১০০ টাকা পেলেন।

এরপর পঞ্চম মাসে তিনি আবার ৫নং আংটাটা দিয়ে একইভাবে ১০০ টাকা আদায় করলেন।

ষষ্ঠ মাসে তিনি ৬নং এবং ৭নং আংটা ছুটো দিয়ে আবার ৫নং আংটা ফিরিয়ে নিলেন।

সপ্তম মাসে হাতে রইল তার ৫নং আংটাই শুধু। মনে বড় দুঃখ যে শেষ আংটাটিও দিয়ে দিতে হবে। কিন্তু চুক্তি যা তাই করতে হলো। সেই ৫নং আংটাই তিনি স্যাকরাকে দিয়ে আবার ১০০ টাকা পেলেন। ভদ্রলোক স্যাকরাকে বললেন, পঞ্চম আংটাটাই ভেঙ্গে আমি মাসে মাসে আপনার কাছ থেকে টাকা নিয়েছি। তবে পঞ্চম আংটার বদলে তৃতীয় আংটা ভেঙ্গেও এই কাজটা একইভাবে করতে পারতাম।

স্যাকরা ভদ্রলোকের বুদ্ধি দেখে তাঁকে অনুরোধ করলেন তার ছেলেকে অংক করবার জন্য। তিনি বললেন, আমার ছেলেকে ৭ মাস অংক করান এবং ৭ মাস পরে আবার আপনার সোনার চেন ফিরিয়ে দেব। আপনি যে আংটাটা ভাঙ্গিয়েছিলেন সেটাও জোড়া লাগিয়ে দেব। স্যাকরার কথায় ভদ্রলোক রাজী হলেন। এবং সুস্থ হবার পর ৭ মাস স্যাকরার ছেলের গৃহ শিক্ষক হয়ে আবার সোনার চেন ফিরে পেলেন।

নতুন উপায়ে গুণ

আমরা এর আগে নানারকম মজার মজার গুণ করেছি এবং সেখানে গুণ করা হয়েছে কতগুলো শর্ত মেনে। আজকের দিনে লগ ও অ্যান্টিলগ তালিকার (Long and Antilog Table) সাহায্যে অনেক সময় গুণ করা হয়। তবে খুব তাড়াতাড়ি বড় বড় গুণ করা যায় যদি আমরা ক্যালকুলেটার (Calculator) ব্যবহার করি। এই ক্যালকুলেটারের প্রয়োগ এখন সব জায়গাতেই দেখা যায়।

এখন আমরা এমনভাবে গুণ করার নিয়ম নিয়ে আলোচনা করব যাতে যে কোন সংখ্যাকে যে কোন সংখ্যা দিয়ে গুণ করা যাবে এবং এই গুণের পদ্ধতিটা সাধারণভাবে গুণ করার পদ্ধতি থেকে কিছুটা আলাদা।

এখানে দেখানো হচ্ছে কি করে দুটো সংখ্যাকে গুণ করা সম্ভব। আমরা সাধারণতঃ যেভাবে গুণ করি সেভাবে কিন্তু এটা করা হচ্ছে না। নতুন উপায়ে গুণ করে আর সাধারণভাবে গুণ করে উত্তর কিন্তু একই হবে। কি করে এটা হচ্ছে দেখা যাক।

উদাহরণ ১ঃ

সাধারণ ভাবে গুণ	অন্যভাবে গুণ		
২৫	~~৩২×২৫~~		২৫×৩২
৩২	~~১৬×৫০~~		~~১২×৬৪~~
৫০	~~৮×১০০~~	অথবা	~~৬×১২৮~~
৭৫ ×	~~৪×২০০~~		৩×২৫৬
৮০০	~~২×৪০০~~		১×৫১২
	১×৮০০		
	৮০০		৮০০

উদাহরণ ২ :

সাধারণভাবে গুণ	অন্যভাবে গুণ
১০০	৩৪ × ১০০
× ৩৫	১৭ × ২০০
৫০০	৮ × ৪০০ (×)
৩০০ ×	৪ × ৮০০ (×)
৩৫০০	২ × ১৬০০ (×)
	১ × ৩২০০
	৩৫০০

ডানদিকে যে গুণটি করে দেখানো হয়েছে সেটির যেখানে যেখানে (×) চিহ্ন দেওয়া হয়েছে সেগুলি বাদ দিয়ে বাকী সংখ্যা তিনটি অর্থাৎ ১০০, ২০০, এবং ৩২০০ যোগ করা হলো এবং তাতে যোগফল হলো ৩৫০০ এবং এই সংখ্যাটিই হচ্ছে ৩৫ এবং ১০০ এর গুণফল।

উদাহরণ ৩ :

সাধারণভাবে গুণ	অন্যভাবে গুণ	
২২২	২২২ ×	৩৩৩ (×)
× ৩৩৩	১১১ ×	৬৬৬
৬৬৬	৫৫ ×	১৩৩২
৬৬৬ ×	২৭ ×	২৬৬৪
৬৬৬ ×	১৩ ×	৫৩২৮
৭৩৯২৬	৬ ×	১০৬৫৬ (×)
	৩ ×	২১৩১২
	১ ×	৪২৬২৪
		৭৩৯২৬

ডানদিকে যে গুণটি করে দেখানো হয়েছে সেটিতে যেখানে যেখানে (×) চিহ্ন দেওয়া হয়েছে সেগুলি বাদ দিয়ে বাকী সংখ্যাগুলি অর্থাৎ ৬৬৬, ১৩৩২, ২৬৬৪, ৫৩২৮, ২১৩১২ এবং ৪২৬২৪ যোগ করা হলো এবং তাতে যোগফল হলো ৭৩৯২৬ এবং এই সংখ্যাটিই হচ্ছে ২২২ এবং ৩৩৩ এর গুণফল।

সুতরাং যে কোন দুটি সংখ্যা তা যত বড়ই হোক না কেন এই নতুন উপায়ে গুণ করা যাবে। এবং এই কাজের জন্য শুধু ২ এর গুণ ও ভাগ কাজটি জানতে হবে।

উদাহরণ ১, ২, এবং ৩ দিয়ে আমরা গুণ করার নতুন পদ্ধতিটা আলোচনা করলাম। প্রথম উদাহরণটি লক্ষ্য করলে আমরা দেখতে পাব যে ৩২ এর সঙ্গে ২৫ এর যে গুণ করা হয়েছে তাতে ৩২, ২৫৬ এবং ৫১২ এই তিনটি সংখ্যার যোগফল নেওয়া হয়েছে। এই তিনটি সংখ্যার প্রথমটিতে ৩২ একবার, দ্বিতীয়টিতে ৩২ আটবার এবং তৃতীয়টিতে ৩২ ষোলবার আছে অর্থাৎ এই ১, ৮ এবং ১৬ সংখ্যা তিনটির যোগফল হলো ২৫ এবং এই কারণেই ৩২ এবং ২৫ এর গুণফল এইভাবে সম্ভব হয়েছে।

দ্বিতীয় উদাহরণে ১০০, ২০০ এবং ৩২০০ সংখ্যা তিনটি যোগ করা হয়েছে এবং সংখ্যা তিনটির প্রথমটিতে ১০০ একবার, দ্বিতীয়টিতে ১০০ দু'বার এবং শেষটিতে ১০০ বত্রিশবার আছে অর্থাৎ ১, ২, এবং ৩২-এর যোগফল হলো ৩৫ এবং এই কারণেই ৩৫ এবং ১০০ এর গুণফল এইভাবে সম্ভব হয়েছে।

তৃতীয় উদাহরণে ৩৩৩ এবং ১০৬৫৬ সংখ্যা দুটি বাদ দিয়ে বাকি সংখ্যাগুলো যোগ করা হয়েছে। এ ক্ষেত্রেও দেখা যাবে বাকি সংখ্যা-গুলোর মধ্যে ৩৩৩ সংখ্যাটি ২২২ বার আছে এবং সেইজন্যই ৩৩৩ এবং ২২২-এর গুণফল হয়েছে ৭৩৯২৬।

নতুন উপায়টা হলো : প্রথমে সংখ্যা দুটোকে পাশাপাশি লেখা হলো। এরপর বাঁদিকের সংখ্যাটিকে ২ দিয়ে ভাগ আর ডানদিকের সংখ্যাটিকে ২ দিয়ে গুণ করতে হবে। ২ দিয়ে ভাগ করার পর যদি ১ ভাগশেষ থাকে, তবে ঐ ভাগশেষকে গ্রাহ্যের মধ্যে আনা হবে না। এমনি করে ক্রমাগত ২ দিয়ে ভাগ করে বাঁদিকের সংখ্যাটিকে ১-এ নিয়ে আসতে হবে আর প্রতিক্ষেত্রেই ডানদিকের সংখ্যাটিকে ২ দিয়ে গুণ করে যেতে হবে। এবার বাঁদিকের জোড় সংখ্যাগুলো লাইন বরাবর কেটে দিতে হবে। এবার ডানদিকের বাকী সংখ্যাগুলো যোগ করলেই, উত্তর ঠিক পাওয়া যাবে। এইভাবে যে কোন গুণ করলে, নির্ভুল উত্তর পাওয়া যাবে।

১৯৮৩ সাল ও সূর্যের ভর

কোন সংখ্যাকে ১০ দিয়ে গুণ করে গুণফল জানতে হলে সংখ্যাটির পাশে একটা শূন্য বসিয়ে দিলেই গুণ হয়ে যায়। ঠিক সেইভাবে ১০০, ১০০০ এবং ১০০০০ দিয়ে কোন সংখ্যাকে গুণ করে গুণফল পেতে হলে সংখ্যাটির পাশে যথাক্রমে ২টো, ৩টে ও ৪টে শূন্য বসাতে হবে এবং তাতেই গুণফল পাওয়া যাবে। এখন যদি ১৯৮৩ এই সালের সংখ্যাটি নিয়ে তাকে ১০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ দিয়ে গুণ করা হয় তবে পাওয়া যাবে

১৯৮৩ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ ০০০ বা ১৯৮৩×১০^{৩০} এবং এই বিশাল সংখ্যাটিকে গ্রামে প্রকাশ করলে সূর্যের ভর পাওয়া যাবে।

কয়েকটি সূত্রের ব্যাখ্যা

(১) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল পাবার উপায়ঃ

এক থেকে একশোর যোগফল আমরা পাই ৫০৫০।

এখন সাধারণভাবে ১ থেকে শুরু করে যে কোন সংখ্যা অবধি (পরপর সংখ্যা) নিয়ে যোগফল পেতে হলে একটি সূত্র মনে রাখলেই চলবে।

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল (s) পাওয়া যায় এইভাবে—

$$S = ১ + ২ + ৩ + ৪ + ৫ \cdots\cdots\cdots\cdots + n$$

$$\text{বা, } S = \frac{n(n+১)}{২} \quad \cdots\cdots A$$

সূত্রটি কিভাবে এল –

ওপরের উদাহরণটি একটি সমান্তর প্রগতি এবং সূত্রটি নিচের উপায়ে পাওয়া যেতে পারে।

ধরা যাক, সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d। প্রগতিটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি বার করতে হবে। এখন আবার ধরা যাক নির্ণেয় যোগফল = S এবং শেষপদ = l

$$\therefore S = a + (a+d) + (a+২d) + \cdots\cdots (l-২d) + (l-d) + l$$

শ্রেণীটিকে উল্টে লিখলে পাওয়া যায়,

$$S = l + (l-d) + (l-২d) + \cdots\cdots + (a+২d) + (a+d) + a$$

(যোগ করে পাওয়া যায়)

$$২S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l) + (a+l)$$

$=(a+l)\times n$ [n সংখ্যক (a+l) পাওয়া যায়]

$\therefore S=\dfrac{n(a+l)}{২}$ .... (১)

আবার শেষ পদ $l=a+(n-১)d$

∴ (১) নং সমীকরণে l এর মান বসালে পাওয়া যায়

$$S=\frac{n}{২}[a+a+(n-১)d]=\frac{n}{২}[২a+(n-১)d]$$

এখন উপরের উদাহরণের সমীকরণটি (A) পাওয়ার জন্য –

a = ১ এবং d = ১ বসাতে হবে, এবং পদসংখ্যা = n থাকবে,

অর্থাৎ $S=\frac{n}{২}[২a+(n-১)d]$ সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$=\frac{n}{২}[২+(n-১)]=\frac{n(n+১)}{২}.$$

উদাহরণ ঃ—

(২) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের যোগফল—

একটি ঘরে পাঁচটি বাক্স আছে। প্রথম বাক্সে ১টাকা, দ্বিতীয় বাক্সে ৪ টাকা, তৃতীয় বাক্সে ৯ টাকা, চতুর্থ বাক্সে ১৬ টাকা এবং পঞ্চম বাক্সে ২৫ টাকা আছে। ঐ পাঁচটি বাক্সে মোট কত টাকা আছে ?

সমাধান—প্রতিটি বাক্সের টাকা একসঙ্গে করে যোগ করলেই মোট কত টাকা আছে জানা যাবে। কম সংখ্যক বাক্স থাকলে যোগ করেই মোট টাকার পরিমাণ (৫৫) টাকা জানা যায়। কিন্তু বাক্স সংখ্যা যদি বেশি হয় এবং প্রতি বাক্সে যদি উপরের হারে টাকার পরিমাণ বাড়তে থাকে, তবে হিসেবটা সূত্র সাহায্যে বার করলেই সহজ হবে।

এখানে মোট টাকা = ১+৪+৯+১৬+২৫

$$=১^২+২^২+৩^২+৪^২+৫$$

এখানে $n = ৫$, সূত্র প্রয়োগ করে

$$\text{মোট টাকা} = \frac{n(n+১)(২n+১)}{৬}$$

$$\therefore \quad \text{মোট টাকা} = \frac{৫(৫+১)\ (১০+১)}{৬}$$

$$= \frac{৫ \times ৬ \times ১১}{৬}$$

$$= ৫৫$$

সূত্রটি কিভাবে এল ?

ধরা যাক যোগফল $= S$

$$S = ১^২ + ২^২ + ৩^২ + \cdots\cdots + n^২$$

এখন, $n^৩ - (n-১)^৩ = ৩n - ৩n^২ + ১$

[এটি একটি অভেদ, সুতরাং n এর যে কোন মানে, দু পদ সমান থাকবে।]

এই অভেদে n এর মান ১, ২, ৩···n বসালে পাওয়া যায়—

$$১^৩ - (১-১)^৩ = ৩.১^২ - ৩.১ + ১$$
$$২^৩ - (২-১)^৩ = ৩.২^২ - ৩.২ + ১$$
$$৩^৩ - (৩-১)^৩ = ৩.৩^২ - ৩.৩ + ১$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n^৩ - (n-১)^৩ = ৩n^২ - ৩n + ১$$

(যোগ করে পাওয়া যায়)

$$n^৩ = ৩\,(১^২ + ২^২ + ৩^২ + \cdots\cdots n^২) - (১ + ২ + ৩\cdots) + n$$

$$\text{বা,} \quad n^৩ = ৩.S - \frac{৩n\,(n+১)}{২} + n$$

$$\text{বা,} \quad ৩.S = n^৩ + \frac{৩n\,(n+১)}{২} - n$$

$$=\frac{২n^{৩}+৩n(n+১)-২n}{২}$$

$$=\frac{n(২n^{২}+৩n+১)}{২}=\frac{n(n+১)(২n+১)}{২}$$

বা, $S=\frac{n(n+১)(২n+১)}{৬}$

(৩) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক কংখ্যার ত্রিঘাত (cube) গুলির যোগফল নির্ণয়—

ধরা যাক n সংখ্যক ত্রিঘাতগুলির যোগফল $=S$

$\therefore\ S=১^{৩}+২^{৩}+৩^{৩}\cdots\cdots\cdots+n^{৩}$

এখন এই যোগফল বার করতে আমরা একটি অভেদের সাহায্য নেব।

অভেদটি হল, $n^{৪}-(n-১)^{৪}=৪n^{৩}-৬n^{২}+৪n-১$

এখন, $n=১, ২, ৩,\cdots\cdots\cdots n$ প্রভৃতি বসালে পাওয়া যাবে—

$১^{৪}-০^{৪}=৪.১^{৩}-৬.১^{২}+৪.১-১$

$২^{৪}-১^{৪}=৪.২^{৩}-৬.২^{২}+৪.২-১$

$৩^{৪}-২^{৪}=৪.৩^{৩}-৬.৩^{২}+৪.৩-১$

… … … … … … …

… … … … … … … …

$n^{৪}-(n-১)^{৩}=৪.n^{৩}-৬.n^{২}+৪.n-১$

(যোগ করে পাই)

$$n^{৪}=৪(১^{৩}+২^{৪}+৩^{২}\cdots\cdots+n^{৩})-৬(১^{২}+২^{২}+৩^{২}\cdots\cdots+n^{২})+৪(১+২+৩\cdots\cdots+n)-n$$

$$=৪S-\frac{৬n(n+১)(২n+১)}{৬}+৪\frac{n(n+১)}{২}-n$$

বা, $৪S = n^৪ + n(n+১)(২n+১) - ২n(n+১) + n$

$= n^৪ + n + n(n+১)(২n+১) - ২n(n+১)$

$= n(n+১)(n^২ - n + ১) + n(n+১)(২n+১) - ২n(n+১)$

$= n(n+১)(n^২ - n + ১ + ২n + ১ - ২)$

$= n(n+১)(n^২ + n) = n(n+১)\,n(n+১)$

$= n^২(n+১)^২$

$$\therefore S = \frac{n^২(n+১)^২}{৪} = \left\{\frac{n(n+১)}{২}\right\}^২$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতি আগের চেয়ে কিছুটা সহজ এবং সেজন্য তোমাদের একটি অভেদ মনে রাখতে হবে। অভেদটি হচ্ছে—

$n^২(n+১)^২ - (n-১)^২n^২ = ৪n^৩$

এবং এই অভেদে $n = ১, ২, ৩, \cdots n$ বসালে, নিচের মত পাওয়া যায়।

$১^২.২^২ - ০^২.n^২ = ৪.১^৩$

$২^২.৩^২ - ১^২২^২ = ৪.২^৩$

$৩^২.৪^২ - ২^২.৩^২ = ৪.৩^৩$

… … … … … …

… … … … … …

$n^২.(n+১)^২ - (n-১)^২.n^২ = ৪.n^৩$

অভেদটি কিভাবে এল ?

$৪n^৩ = n^২ \times ৪n$

$= n^২\{(n+১)^২ - (n-১)^২\}$

$= n^২(n+১)^২ - n^২(n-১)^২$

যোগ করলে পাওয়া যায়

$n^২(n+১)^২ = ৪[১^৩ + ২^৩ + ৩ \cdots\cdots + n^৩] = ৪.S$

$$\therefore S = \frac{n^২(n+১)^২}{৪} = \left\{\frac{n(n+১)}{২}\right\}^২$$

[বাঁ দিকের রাশিগুলি যোগ করার সময় প্রত্যেকটি রাশির

বাঁদিকের সংখ্যাগুলো পরের রাশির ডানদিকের সংখ্যার সঙ্গে কাটাকুটি হয়ে যাচ্ছে এবং পরে থাকছে শুধুমাত্র $n^২(n+১)^২$

প্রয়োজনীয় কথা : n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনফলের সমষ্টি= n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যক সমষ্টির বর্গ, অর্থাৎ—

$$১^৩+২^৩+৩^৩+\cdots\cdots+n^৩=(১+২+৩\cdots\cdots n)^২$$

উদাহরণ :

এই সূত্র ব্যবহার করে আমরা নিচের অংকগুলির সমাধান করতে পারি—

$$\frac{৫^৩+৪^৩+৩^৩+২^৩+১^৩}{৫+৪+৩+২+১} = \frac{\left\{\frac{৫(৫+১)}{২}\right\}^২}{\left\{\frac{৫(৫+১)}{২}\right\}}$$

$$=\frac{৫(৫+১)}{২}=\frac{৫\times ৬}{২}=১৫$$

সূত্র দুটি ব্যবহার করে এবং n=৫ বসিয়ে এই মান সহজেই পাওয়া যায়।

দুটি সহজ সূত্র

(৪) $a\neq 0$ হলে, (i) $a^o=1$ এবং (ii) $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ হয়।

(i) প্রমাণ : $a^m\times a^o=a^{m+o}=a^m$

$$\therefore a^o=\frac{a^m}{a^m}=1$$

(ii) $a^m\times a^{-m}=a^{m-m}=a^o=1$

$$\therefore a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$
